

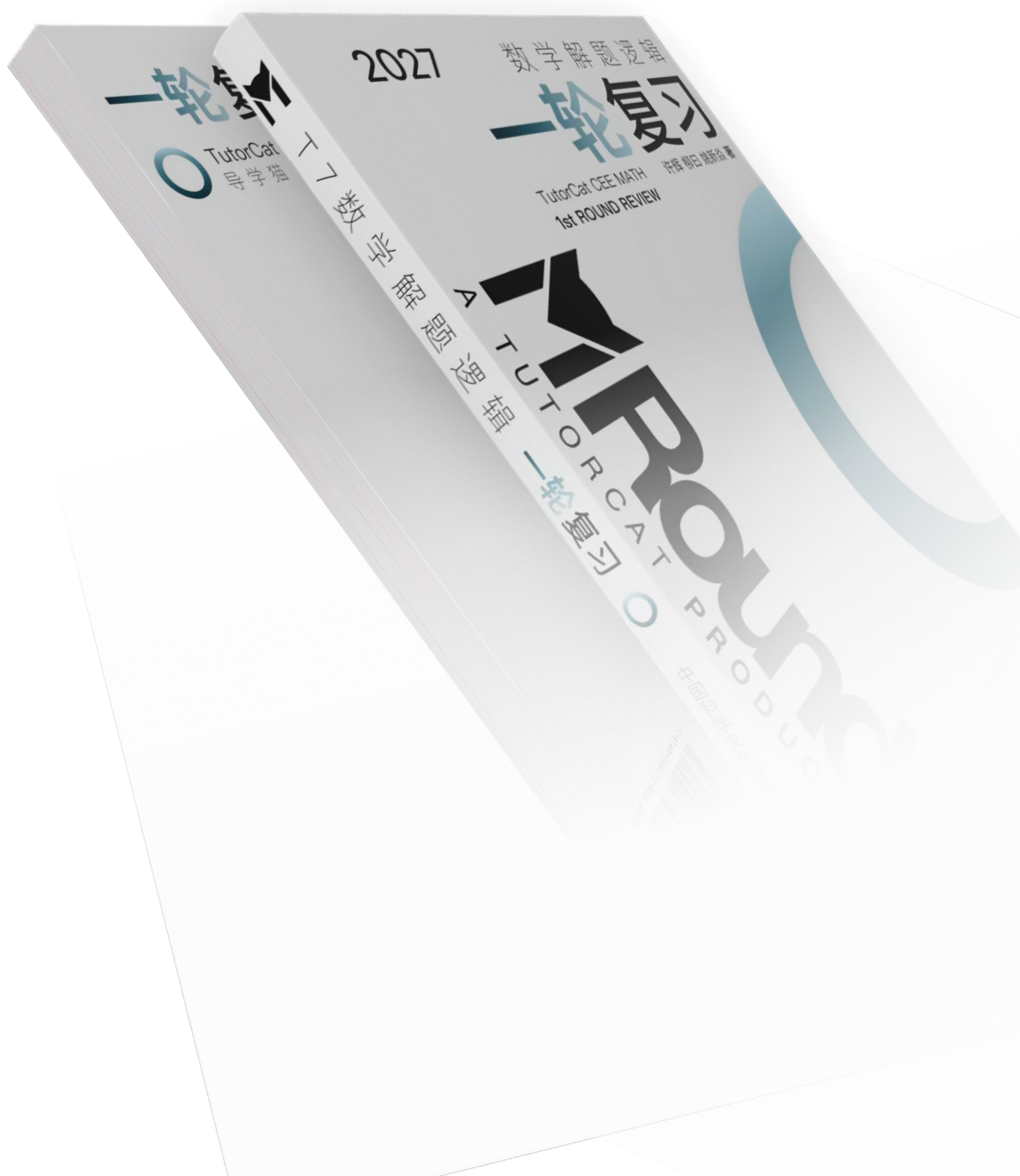
TutorCat 一轮复习

一轮胜，局局胜。

直观，体系化，讲练结合，极高效率

新版

试读 ↓



CHAPTER 1	22
Sets & Logic 集合与逻辑	22
第一节 集合的概念	22
一.集合与元素	22
1. 集合	22
2. 元素与集合的关系	22
3. 常见数集	22
4. 集合的表示方式	23
5. 集合的分类	23
二.集合间的基本关系	23
1. 包含关系：子集	23
2. 真包含关系：真子集	23
3. 相等关系	24
4. 不相交关系	24
5. 空集	24
6. 集合关系的层次：幂集 (Power Set)	24
三.集合的运算及运算律	25
1. 集合的运算	25
2. 集合的运算律	26
四.容斥原理	27
1. 两个集合的容斥	27
2. 三个集合的容斥	27
3. 通用规律 (n 个集合)	27
第二节 逻辑用语	28
一.命题与量词	28
1. 命题的概念	28
2. 量词及其命题	28
3. 逻辑联结词 (Logical Connectives)	28
4. 总结表：复合命题真假性	28
二.四种形式的命题	29
1. 定义与构成	29
2. 四种命题的真假关系	29
3. 实例解析	29
三.命题的否定	29

1. 简单陈述句 (直言命题)	30
2. 全称命题与特称命题 (含有量词的命题)	30
3. “若 p , 则 q ”形式的命题	30
四.充分条件与必要条件	30
1. 基本定义 (以箭头方向判定)	30
2. 集合判定法 (最实用的做题技巧)	30
3. 四种逻辑关系的分类	30
4. 充要条件的证明逻辑 (双向奔赴)	31
CHAPTER 2	32
Inequality 不等式	32
第一节不等式及其性质	32
一.不等式	32
二.不等式的性质	32
三.解不等式	34
1. 多项式函数不等式	34
2. 分式不等式	35
3. 绝对值不等式	36
4. 根式不等式	36
5. 指数与对数不等式	37
第二节 基本不等式	38
一.基本不等式的概念	38
1. 基本不等式	38
2. 均值不等式及其推广	38
二.基本不等式的使用条件与特征	39
1. 使用条件: 一正、二定、三相等	39
2. 积定和最小, 和定积最大	39
三.基本不等式的使用思路	40
1. 配凑思路	40
2. 消元思路	40
3. 换元思路	41
4. 齐次化思路	41
5. 常值代换思路	41
第三节 扩展不等式	42
一.糖水不等式	42

1. 核心公式	42
2. 反向情况	42
3. 作差法证明	42
二.绝对值三角不等式	42
1. 核心公式 (链式结构)	42
2. 几何意义: 数轴上的距离	43
3. 取等号的条件	43
三.柯西不等式	44
1. 理论根基: 二维拉格朗日恒等式	44
2. 核心形式: 二维柯西不等式	44
3. 几何本质-向量视角	44
4. 推广: n 维形式	44
四.权方和不等式	45
1. 核心理论: 二维形式	45
2. 理论背景: 为什么它成立?	45
3. 推广: n 维一般形式	45
CHAPTER 3	46
Functions & Derivatives	46
函数与导数	46
第一节 函数的概念	46
一.函数	46
二.复合函数	47
第二节 单调性、奇偶性	47
一.单调性	47
1. 单调递增与单调递减	47
2. 单调区间	47
3. 复合函数单调性	47
二.奇偶性	48
1. 奇偶性的概念	48
2. 偶函数	48
3. 奇函数	48
4. 判断奇偶性的步骤	49
第三节 函数变换	50
一.函数的平移变换	50

1. 上下平移	50
2. 左右平移	50
3. 上下左右同时平移	50
二.函数的伸缩变换	50
1. 竖直伸缩 (y方向伸缩)	50
2. 水平压缩 (x方向伸缩)	51
三.函数的伸缩—平移综合变换	51
第四节 对称性&周期性分析	52
一.自变量关系与称性分析	52
1. 自变量对称性关系的几何意义	52
2. 对称的自变量函数值相等——轴对称性	52
3. 对称的自变量函数值相加为定值——中心对称性	53
4. 分析对称性的步骤	53
二.自变量关系与周期性分析	53
1. 自变量周期性关系的几何意义	53
2. 周期性的产生与意义	53
3. 周期、周期函数、最小正周期的定义	54
三.描点法作图几何直观化抽象函数性质	54
第六节 基本函数	57
一.幂函数	57
1. 基本定义	57
2. 幂函数的图像性质	57
3. 多项式函数	59
二.指数函数	64
1. 基本定义	64
2. 图像特征与单调性	64
3. 指数法则	64
4. 自然指数函数	64
三.对数函数	66
1. 对数的概念	66
2. 对数的运算	66
3. 对数与指数的互化	66
4. 对数函数的概念	66
5. 对数函数的图像性质	66

四.三角函数	69
1. 任意角与弧度制	69
2. 单位圆	70
3. 三角函数的概念与性质	70
4. 三角恒等式	71
5. 诱导公式	71
6. 恒等变换 (和差角与二倍角公式)	74
7. 辅助角公式	77
8. 辅助角公式的优化运算-单位圆建模	77
9. $A\sin(\omega x + \phi)$ 图像性质	78
10. ω 取值范围问题概述-操纵杆与约束	81
11. 相位角已知的 ω 取值范围问题	82
12. 相位角未知的 ω 取值范围问题	84
第七节 反函数	86
1. 基本定义	86
2. 求反函数的一般步骤	86
3. 图像关系	86
4. 反函数的存在条件	86
5. *扩展-反三角函数	87
第八节 导数基础与函数性质	88
一.导数的定义与几何意义	88
1. 极限的定义	88
2. 极限的运算法则	88
3. 导数的概念	88
4. 速率的局部影响 (保号性)	89
5. 极值点 (Extreme Points)	89
6. 拐点 (Inflection Points)	89
7. 极值点与拐点的判定	89
二.导数的运算与切线方程	90
1. 导数的运算法则	90
2. 求导法则	91
3. 导数与切线方程	92
4. 公切线问题与导数	93
5. 牛顿切线法	94
二.导数与单调性	95

1. 导数与函数单调性的对应关系	95
2. 极值与极值点	95
3. 极值与速率	95
4. 利用导数求函数的单调区间与讨论单调性	95
三.速率与极限	97
1. 洛必达法则	97
2. 极限与函数增长速率	98
3. 指对幂混阶函数	99
四.原函数与导函数的奇偶性&周期性关系	101
1. 原函数与导函数的奇偶性关系	101
2. 原函数与导函数的周期性关系	101
第九节 不等式生成	103
一.切线不等式	103
1. e^x 的切线不等式	103
2. $\ln x$ 的切线不等式	103
二.利用积分推导任意精度不等式	104
1. 不定积分	104
2. 积分运算法则（高中范围内）	104
3. 通过积分构造不等式	105
4. 积分构造得到的不等式	107
三.复合函数类-代数变形（取等不变）	109
1. 指数化	109
2. 替换自变量	109
四.利用复合函数改变不等式取等	109
1. 平移逻辑	109
2. 倍缩逻辑	110
五.利用分式的性质构造多取等不等式	110
第十节 不等式的证明	112
一. 不等式之间的关系	112
1. 平移和伸缩变换与嵌套关系下取等的改变	112
2. 指数和对数不等式的嵌套关系	112
3. 由同一取等处不同不等式运算得到的不等式	112
二. 不等式证明的基本方法	113
三. 通过变形减少证明的求导次数	114

1. 指数结构	114
2. 对数结构	114
3. “指数化”形式	115
4. 三角函数结构	116
四. 含参不等式证明——参数分析	117
1. 主元单调	117
2. 主元不单调（初步）	117
CHAPTER 4	118
Plain Geometry & Vectors	118
平面几何与向量	118
第一节 “方程系统”视角下的解三角形	118
一. “方程系统”角度理解三角形	118
1. 三角形 = 六个变量的约束系统	118
2. 约束方程（内角和、正弦定理、余弦定理）	118
3. 从“方程”角度看解三角形本质	119
二. 三角形代数表达式的几何直观化构型	120
1. 将“边 $\times$ 三角函数”转换为高	120
2. 正弦定理边角互化的齐次结构	122
三. 几何构型	123
1. 等腰一线构型	123
2. Stewart构型	125
3. 角平分线构型	127
4. 腰高构型	128
5. 平方和隐圆	128
四. 三角形的重心、内心、外心、垂心	129
1. 重心 (Centroid)	129
2. 内心 (Incenter)	129
3. 外心 (Circumcenter)	129
4. 垂心 (Orthocenter)	130
第二节 平面向量	132
一. 平面向量的定义与运算	132
1. 平面向量的定义	132
2. 向量的加减法	132
3. 向量的乘法	133

4. 向量运算的几何意义	134
二. 三点共线定理与等和线	135
1. 相似三角形与共线定理	135
2. 共线定理的推论-等和线定理	137
三. 常见几何构型的向量表达	138
1. 对称系数交换性质	138
2. 极化恒等式	139
3. 对角线向量定理	139
4. 圆的向量表示	139
四. 奔驰定理与四心的向量	141
1. 重心的向量表达	141
2. 垂心的向量表达	141
3. 奔驰定理	141
4. 奔驰定理的四心推论	141
CHAPTER 5	143
Plural 复数	143
第一节 复数的概念	143
一. 虚数单位与复数	143
1. 虚数单位	143
2. 复数的构成	143
3. 复平面	144
4. 复数相等	145
二. 运算规则	146
1. 加减法	146
2. 乘法	146
三. 共轭复数	147
1. 定义	147
2. 几何意义-关于实轴的对称	147
3. 四大性质	148
4. 核心用途-复数除法	148
四. 复数的三角形式与欧拉公式	150
1. 复数的三角形式	150
2. 复数的代数形式与三角形式之间转化	150
3. 欧拉公式	151

五.De Moivre (棣莫弗) 定理	152
1. De Moivre定理与欧拉公式的联系	152
2. 棣莫弗定理的几何意义	152
CHAPTER 6	153
Space Geometry & Vectors	153
空间几何与向量	153
第一节 构成空间图形的基本元素与常见几何体	153
一.空间图形基本元素	153
二.基本元素间的位置关系	154
1. 点与点、直线、平面的位置关系	154
2. 直线与直线、平面的位置关系	154
3. 平面与平面的位置关系	154
三.常见空间几何体	158
1. 柱体	158
2. 锥体	160
3. 台体	163
4. 球	164
第二节 空间向量	165
一.空间向量及其运算	165
1. 空间向量 (Space Vector)	165
2. 空间向量的核心定理	165
3. 空间直角坐标系	165
4. 空间向量的运算	165
5. 平面的法向量及其求法	166
6. 平面的方程	167
7. 空间直线的方程	167
第三节 点、直线以及平面之间位置关系的证明	168
一.四个基本事实及其推论	168
1. 四个基本事实	168
2. 基本事实的推论	168
二.直线、平面的平行判定与性质	169
1. 直线、平面平行的判定定理与向量证明	169
2. 直线、平面平行的性质定理	171
三.直线、平面垂直的判定与性质	174

1. 直线、平面垂直的判定定理与向量证明	174
2. 直线、平面垂直的性质定理	175
四.直线与直线异面的判定	179
第四节 空间距离与空间角度	180
一.空间距离及其计算	180
1. 点到直线的距离	180
2. 点到平面的距离	181
3. 直线与直线、平面间的距离	183
二.空间角度及其计算	184
1. 直线的夹角	184
2. 直线与平面的夹角	185
3. 平面与平面的夹角	187
CHAPTER 7	191
Permutations & Combinations	191
排列组合	191
一.两个核心计数原理	191
1. 分类加法计数原理	191
2. 分步乘法计数原理	192
二.排列与组合	192
1. 排列与排列数	192
2. 组合与组合数	193
3. 排列与组合核心差异对比	194
三.抽样问题	194
1. 无放回抽样（组合模型）	194
2. 有放回抽样（重复排列）	195
四.限制性排列组合问题	196
1. 捆绑法	196
2. 插空法	196
3. 隔板法	197
4. 优先法（特殊元素优先）	198
5. 间接法（剔除法）	199
6. 消序法与分组分配法	200
五.二项式定理	203
1. 二项式定理	203

2. 二项式系数的对称性	203
3. 展开式系数问题	204
4. 多项式定理	205
CHAPTER 8	206
Posibility 统计与概率	206
第一节 随机抽样与用样本估计总体	206
一.样本与总体	206
二.随机抽样	207
1. 简单随机抽样 (Simple Random Sampling)	207
2. 系统抽样 (Systematic Sampling)	207
3. 分层随机抽样 (Stratified Sampling)	208
三.用样本估计总体	208
1. 取值规律的估计	208
2. 百分位数的估计	211
3. 集中趋势的估计	212
4. 离散程度的估计	214
第二节 随机事件与概率	216
一.随机试验到事件关系的基本理论框架	216
1. 随机试验 (Random Experiment)	216
2. 样本点与样本空间	216
3. 随机事件与确定事件	216
4. 事件的关系	216
5. 互斥事件、对立事件	217
6. 独立事件	217
二.概率的定义、性质	217
1. 频率与概率	217
2. 概率的性质	218
三.古典概型	218
1. 古典概型的定义	218
2. 古典概型-利用利用等可能性+对称性优化的枚举过程	218
3. 对立事件、互斥事件、独立事件的概率表示	221
4. 概率的计算	222
四.几何化概率与条件概率	224
1. 几何化概率	224

2. 几何化概率视角下的事件关系	224
3. 几何化与条件概率、全概率公式、贝叶斯公式	225
4. 几何化概率的通用性	227
第三节 随机变量及其分布	229
一. 随机变量	229
1. 随机变量	229
2. 离散型随机变量与连续型随机变量	229
3. 随机变量与事件的关系	229
4. 随机变量间关系	229
5. 随机变量函数	230
6. 随机变量的独立性	230
二. 离散型随机变量的分布列	230
1. 概率分布列	230
2. 离散型随机变量的分布列的性质	230
3. 随机变量函数的分布列	230
三. 离散型随机变量的数字特征	231
1. 数学期望 (Mathematical Expectation)	231
2. 数学期望的性质	231
3. 方差 (Variance)	234
4. 方差的性质	236
四. 常见离散型随机变量的分布	237
1. 伯努利试验 (Bernoulli Trials)	237
2. 两点分布 (Two-point Distribution)	237
3. 二项分布 (Binomial Distribution)	237
4. 几何分布 (Geometric Distribution)	238
5. 超几何分布 (Hypergeometric Distribution)	239
6. 泊松分布	240
五. 正态分布	241
1. 正态分布与正态曲线	241
2. 正态分布的性质	241
3. 正态分布的概率取值	242
第四节 成对数据的统计分析	243
一. 变量的相关关系	243
1. 成对数据	243

2. 变量之间的关系类型、散点图、回归直线	243
二.样本相关系数	243
1. 定义	243
2. 几何意义 & 判断标准	243
三.一元线性回归模型	247
1. 一元线性回归模型	247
2. 模型参数的最小二乘估计	247
四.列联表与独立性检验	249
1. 分类变量	249
2. 列联表	249
3. 独立性检验	249
CHAPTER 9	253
Sequence 数列	253
第一节 数列的基本内容	253
一.数列的概念	253
1. 数列	253
2. 数列的通项公式	253
3. 数列的递推公式	254
二.数列的性质	254
1. 数列本身的性质	254
2. 数列单调性的判定	254
3. 数列的最值项	255
4. 数列的周期性	256
三.数列的求和与求积	257
1. 数列的前 n 项和 S_n	257
2. 数列的前 n 项积 T_n	257
第二节 等差数列及其性质	258
一.等差数列的定义以及通项公式	258
1. 等差数列 (Arithmetic Progression)	258
2. 等差数列的通项公式	258
3. 等差中项	259
4. 等差数列的单调性	259
二.等差数列的前 n 项和	259
三.等差数列的判断方法	260

四.等差数列的通项性质	261
1. 等差数列通项函数观	261
2. 多个等差数列叠加	261
3. 等差数列的底标特性	261
五.等差数列前 n 项和 S_n 性质	262
1. 前 n 项和 S_n 函数观	262
2. S_n 和 a_n 的转换特性	262
3. S_n 自身特性	263
4. S_n 的最值判断	265
第三节 等比数列及其性质	267
一.等比数列的定义以及通项公式	267
1. 等比数列	267
2. 等比数列的通项公式	267
3. 等比中项	267
4. 等比数列的单调性	268
二.等比数列的前 n 项和	268
三.等比数列的判断方法	269
四.等比数列的通项性质	269
1. 等比数列通项函数观	269
2. 多个等比数列叠乘	269
3. 等比数列的底标特性	270
五.等比数列前 n 项和 S_n 性质	271
1. 前 n 项和 S_n 函数观	271
2. S_n 和 a_n 的转换特性	271
3. S_n 自身特性	271
六.等比数列前 n 项积 T_n	273
第四节 基础递推构造	274
一.累加型与累乘型	274
1. 累加型	274
2. 累乘型	274
二.线性型	275
1. 常数情况	275
2. 线性情况	276
3. 二次及高次情况*	277

4. 指数情况	278
三.对数型	280
1. 标准模型	280
2. 拓展模型：对数化的两种变式	280
四.倒数型	280
1. 标准模型	280
2. 拓展模型：对数化的两种变式	281
五.齐次型	282
第五节 数列求和方法	283
一.公式求和与分组并项求和	283
1. 公式求和法	283
2. 分组（并项）求和	284
二.倒序相加法	286
1. 表述	286
2. 适用性分析	286
3. 非中心对称的分析	286
三.错位相减法	287
四.简单裂项相消法	290
1. 裂项相消法	290
2. 等差分式型裂项	290
3. 等比分式型裂项	291
4. 根式分式型裂项	292
5. 等差乘等比型裂项	292
五.递推转化法	294
CHAPTER 10	295
Conics 解析几何	295
第一节 直线	295
一.定线与直线方程	295
1. 定线	295
2. 方向度量	295
3. 直线的方程	296
二.点、直线的位置关系	298
1. 点与直线的位置关系	298
2. 直线与直线的位置关系	298

3. 两点间距离公式	300
4. 点到直线的距离	300
5. 平行直线间的距离	301
三.直线系方程	301
1. 相交直线系方程	301
2. 平行直线系方程	302
3. 垂直直线系方程	302
第二节 圆的概念	303
一.圆以及圆的方程	303
1. 圆	303
2. 圆的方程	303
二.点、直线、圆的位置关系	304
1. 点与圆的位置关系	304
2. 直线与圆的位置关系	305
3. 圆和圆的位置关系	305
三.圆的弦长与切线	306
1. 圆的弦长	306
2. 圆的切线	307
3. 圆的切线方程	307
4. 圆的公切线与条数	309
5. 圆的切线长 (切线长定理)	310
四.圆系方程	311
1. 同心圆系方程	311
2. 过定点圆系方程	311
3. 直线与圆交点圆系方程	311
4. 相交圆系方程	311
第三节 对称性与距离问题	313
一.点关于点或直线对称	313
1. 点关于点对称公式	313
2. 点关于直线对称公式	313
二.直线关于点或直线对称	314
1. 直线关于点对称公式	314
2. 直线关于直线对称公式	314
三.圆上点距离问题	316

1. 点到圆上点距离最值	316
2. 圆上点到直线距离定值的点个数问题	316
第四节 圆锥曲线	318
一.圆锥曲线的定义	318
1. 圆锥曲线的第一定义	318
2. 第二定义	319
3. 第三定义	320
二.圆锥曲线的方程以及方程参数	322
1. 椭圆的方程	322
2. 椭圆的方程参数与简单几何性质	322
3. 双曲线的方程	323
4. 双曲线的方程参数与简单几何性质	324
5. 抛物线的方程	325
6. 抛物线的方程参数与简单几何性质	325
三.焦半径与焦点弦公式	327
1. 坐标焦半径与焦点弦	327
2. 角度焦半径与焦点弦	329
3. 焦半径的性质	334
4. 焦点弦的性质	335
5. 焦半径的共线比例特征	339
四.焦点三角形	341
1. 焦点三角形的长度与面积性质	341
2. 标准焦点三角形的正弦推论	343
3. 椭圆焦点三角形的最大顶角定理	344
第五节 直线与圆锥曲线联立的常规方法	347
一.直线与圆锥曲线的联立	347
1. 直线与圆锥曲线联立的原理	347
2. 直线与圆锥曲线的位置关系	349
二.常规联立的优算方法	350
1. 斜率和、积以及数量积	350
2. 联立解点	357
3. 非对称问题处理	362
4. 长度计算	365
5. 面积计算	370

6. 切线问题	373
三. 平移齐次化	375
1. 齐次化原理	375
2. 平移原理	375
3. 曲线上平移齐次化的应用	376
4. 中点轨迹的齐次化应用	380
5. 非曲线上的平移齐次化应用	380

CHAPTER 1

Sets & Logic 集合与逻辑



章节目标 CHAPTER OBJECTIVES

1. 理解集合的性质与表示方式
2. 明晰集合之间的关系、熟练集合的逻辑运算掌握容斥原理
3. 理解“命题与量词”、“充分条件与必要条件”

第一节 集合的概念

一.集合与元素

1. 集合

集合 (Set) 是最基础、最核心的概念之一。它简单到几乎可以定义一切数学对象。通俗地说，集合就是把一些能够确定的对象“收集”在一起，看作一个整体。

要成为一个数学意义上的集合，必须满足以下三个特性：

确定性 集合里的元素必须是明确的。比如“高个子的人”不能构成集合（标准模糊），但“身高超过 $180cm$ 的人”可以。

互异性 集合里的元素互不相同。比如 $\{1,2,2,3\}$ 实际上就是 $\{1,2,3\}$ 。

无序性 元素排在前面还是后面无所谓。 $\{1,2,3\}$ 和 $\{3,2,1\}$ 是同一个集合。

通常用大写字母表示集合（如 A, B, S ），用小写字母表示元素（如 a, b, x ）；

2. 元素与集合的关系

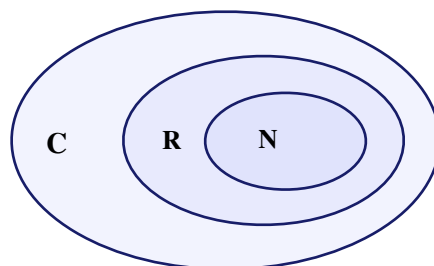
$a \in A$ ： a 是集合 A 的元素，就称 a **属于** 集合 A

$a \notin A$ ： a 不是集合 A 的元素，就称 a **不属于** 集合 A ，记作 $a \notin A$ 。

例 已知集合 $A = \{1,2,3\}$ ，元素 $1, 2, 4$ ，则 $1,2 \in A$ ， $4 \notin A$ 。

3. 常见数集

N	全体非负整数组成的集合称为 非负整数集
N^* 或 N_+	全体正整数组成的集合称为 正整数集
Z	全体整数组成的集合称为 整数集
Q	全体有理数组成的集合称为 有理数集
R	全体实数组成的集合称为 实数集
C	全体复数组成的集合称为 复数集



1. 简单陈述句（直言命题）

直接否定谓语中的判断词。

方法 将“是”改为“不是”，“在”改为“不在”等。

举例 $p: \sqrt{2}$ 是有理数； $\neg p: \sqrt{2}$ 不是有理数。

2. 全称命题与特称命题（含有量词的命题）

这是考试的重难点，核心步骤是：换量词，否结论。

命题类型	原命题 p	命题的否定 $\neg p$	变换规则
全称命题	$\forall x \in M, p(x)$	$\exists x \in M, \neg p(x)$	$\forall \rightarrow \exists$, 且否定 $p(x)$
特称命题	$\exists x \in M, p(x)$	$\forall x \in M, \neg p(x)$	$\exists \rightarrow \forall$, 且否定 $p(x)$

举例 p : 所有的矩形都是平行四边形 ($\forall$)； $\neg p$: 至少有一个矩形不是平行四边形 ($\exists$)。

3. “若 p , 则 q ”形式的命题

否定一个条件命题时，前提条件 p 是不动的，只否定结论 q 。形式：

若 p , 则 $\neg q$

举例 p : 若 $x > 1$, 则 $x^2 > 1$ ； $\neg p$: 若 $x > 1$, 则 $x^2 \leq 1$ 。

四. 充分条件与必要条件

1. 基本定义（以箭头方向判定）

若命题“若 p , 则 q ”为真，记作 $p \Rightarrow q$ ：

箭头发出的地方是充分的，箭头指向的地方是必要的

逻辑关系	称呼	直观理解
充分条件	p 是 q 的充分条件	有它就行：只要 p 成立， q 就一定成立。
必要条件	q 是 p 的必要条件	没它不行：如果 q 不成立，那么 p 绝不可能成立。

前推后，前充分；后推前，后充分。

EXAMPLE 考虑命题“如果一个数是偶数，那么它能被2整除”：

该命题是真命题，则“是偶数”是“能被2整除”充分条件，则“能被2整除”是“是偶数”必要条件。

2. 集合判定法（最实用的做题技巧）

设满足条件 p 的集合为 A ，满足条件 q 的集合为 B ：

若 $A \subseteq B$, 则 $p \Rightarrow q$, p 是 q 的充分条件；

若 $B \subseteq A$, 则 $q \Rightarrow p$, p 是 q 的必要条件；

3. 四种逻辑关系的分类

通过双向箭头的成立情况，可分为以下四类：

逻辑符号	p 与 q 的关系	例子 (设 $x \in \mathbb{R}$)
$p \Rightarrow q$ 且 $q \not\Rightarrow p$	充分不必要条件	$p: x = 1, q: x^2 = 1$
$q \Rightarrow p$ 且 $p \not\Rightarrow q$	必要不充分条件	$p: x^2 = 1, q: x = 1$
$p \Leftrightarrow q$	充要条件	$p: x > 0, q: 2x > 0$
$p \not\Rightarrow q$ 且 $q \not\Rightarrow p$	既不充分也不必要条件	$p: x > 1, q: x < 0$

CHAPTER 2

Inequality 不等式



章节目标 CHAPTER OBJECTIVES

本章的学习核心不仅仅是掌握几个著名的不等式公式，更是要构建一套“比较与优化”的逻辑。通过本章的学习，你将达成以下三个维度的目标：

- 掌握“约束”与“边界”

理解本质：通过对等式性质的延伸，理解不等号在数值缩放中的传递性。

精准判别：在复杂的函数背景下，能够迅速识别题目属于哪种不等式模型（如：分式结构找权方和，根式叠加找柯西）。

- 从“死背公式”到“艺术配凑”

均值不等式的灵魂：深刻领悟“一正、二定、三相等”的实战红线，掌握通过配凑、消元、常数代换等手段人为制造“定值”的技巧。

绝对值的几何化：将抽象的绝对值符号转化为数轴上的距离模型，实现“眼中有公式，脑中有图像”。

- 解决最值与证明问题

工具选择：面对多元最值问题，能灵活在基本不等式、柯西不等式与权方和不等式之间进行最优工具切换。

严谨性训练：在处理糖水不等式、三角不等式等实际模型时，养成严谨讨论取等条件的习惯，避免“会做但拿不到全分”的陷阱。

不等式是数学中的“杠杆”，它允许我们用已知的确定性去撬动未知的不确定性。当你学会了如何平衡 a 与 b 的权重，你也就掌握了数学中最精妙的平衡术。

第一节不等式及其性质

一.不等式

数学符号“ $>$ ”（大于号）、“ $<$ ”（小于号）、“ $\geq$ ”（大于等于号）、“ $\leq$ ”（小于等于号）、“ $\neq$ ”（不等号），均为用以表示两个量数之间不等关系的符号；用这些符号连接两个数代数式，以表示他们之间的不等关系，含有这些符号的式子称为不等式。

对于“ $\geq$ ”（或“ $\leq$ ”）而言，包含大于（或小于）或等于两种情况，即

$$a \geq b \Leftrightarrow a > b \text{ 或 } a = b; a \leq b \Leftrightarrow a < b \text{ 或 } a = b$$

二.不等式的性质

性质名称	数学表达	注意事项
对称性	$a > b \Leftrightarrow b < a$	左右互换，符号变向
传递性	$a > b, b > c \Rightarrow a > c$	同向可传递
可加性	$a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$	左右加减同一个数，符号不变
同向可加性	$a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d$	注意：不可同向相减

三.柯西不等式

1. 理论根基：二维拉格朗日恒等式

在进入柯西不等式之前，必须先看看这个恒等式，它是柯西不等式的“灵魂”。设 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ，则有：

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

直观理解 左边是两对平方和的积，右边分裂成了一个“乘积之和的平方”和一个“差的平方”。

推导结论 因为 $(ad - bc)^2 \geq 0$ 永远成立，所以只要扔掉右边那一项，大于等于号就出来了。

2. 核心形式：二维柯西不等式

对于任意实数 a, b, c, d ：

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$$

文字口诀 平方和的积 $\geq$ 积之和的平方。

等号成立条件 当且仅当 $ad - bc = 0$ ，即 $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ 时（分母为0时视为对应分子也为0），等号成立。

3. 几何本质-向量视角

这是理解柯西不等式最深刻的方式。如果你学过平面向量，设 $\vec{u} = (a, b)$ ， $\vec{v} = (c, d)$ ，那么：

$$|\vec{u}|^2 = a^2 + b^2, \quad |\vec{v}|^2 = c^2 + d^2, \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = ac + bd$$

柯西不等式其实就是：

$$|\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \geq (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$$

两边开方即得： $|\vec{u}| |\vec{v}| \geq |\vec{u} \cdot \vec{v}|$ 。本质即向量的模长乘积一定不小于它们的点积。

EXAMPLE 1 已知实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 = 10$ ，求 $3x + 4y$ 的最大值。

解析

由柯西不等式 $(3^2 + 4^2)(x^2 + y^2) = 250 \geq (3x + 4y)^2$ ，解得 $-5\sqrt{10} \leq 3x + 4y \leq 5\sqrt{10}$ ，当且仅当 $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$ 时取等，故 $3x + 4y$ 的最大值为 $5\sqrt{10}$ 。

EXAMPLE 2 求函数 $f(x) = \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{9 - x^2}$ 的最大值。

解析

由柯西不等式 $(1^2 + 1^2)[(x^2 + 4) + (9 - x^2)] = 26 \geq (\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{9 - x^2})^2$ ，解得

$$-\sqrt{26} \leq \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{9 - x^2} \leq \sqrt{26}$$

当且仅当 $x^2 = \frac{5}{2}$ 时取等，故最大值为 $\sqrt{26}$ 。

4. 推广：n 维形式

当你面对多个变量时，结构依然稳固。设 $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, n$)，即

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$$

当且仅当 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ ，或 $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ ，或 $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$ 时取等。

CHAPTER 3

Functions & Derivatives

函数与导数



章节目标 CHAPTER OBJECTIVES

在高中数学中，函数是刻画变量之间关系的核心工具，而导数则是研究函数变化规律的重要手段。无论是指数函数、对数函数，还是三角函数、多项式函数，本质上都属于不同类型的函数模型。表面上看，这些函数形式各不相同，但在研究方法上却具有高度统一的思想。在本章节的学习中，我们将围绕“函数的研究方法”这一核心问题展开。通常来说，研究一个函数主要有三条重要的主线：

函数性质 函数图像 导数工具

- 通过分析 **函数性质**，可以更加精确地描述函数的结构特征，例如 **单调性**、**奇偶性**、**周期性** 以及 **最值** 问题等。这些性质构成了研究函数的重要内容，也是高考考查的重点。
- 通过 **图像** 可以直观地理解函数的 **整体变化趋势**，例如函数是上升还是下降、是否存在周期、函数的大致形状如何等。图像为我们提供了最直观的认识，是理解函数的第一视角。
- 在此基础上，引入 **导数** 这一工具，可以更加系统和有效地研究函数的变化规律。借助导数，我们可以判断函数的 **单调区间**、求函数的 **极值与最值**，并进一步研究函数零点及相关参数问题。导数使得对函数性质的研究由直观走向精确，由局部分析走向整体把握。

因此，本章节将以这三条主线，逐步学习不同类型的基本函数模型，并通过图像分析与性质研究建立整体认识，最终利用导数这一统一工具，对函数进行更加深入和系统的研究。通过这样的复习路径，我们能够掌握各类函数的特点，更重要的是形成研究函数的一般方法和数学思想。

第一节 函数的概念

一. 函数

函数 (Function) 用来描述两个变量之间确定的对应关系。简单来说：

一个量的变化会按照某种规则决定 另一个量的值，这种关系就叫 **函数**。

函数的严格定义 设有两个集合 A 和 B ，如果按照某个规则，使得：

集合 A 中的每一个元素在 集合 B 中都有 **唯一确定** 的一个元素与之对应

那么这种对应关系就叫 **函数**，记作

$$y = f(x), x \in D$$

其中， x 是 **自变量**（输入）， y 是 **因变量**（输出）；

f 是 **法则**（函数规则）， D 是 **定义域**， y 的取值范围是 **值域**。

定义域决定了函数能够操作的输入范围，法则描述了如何进行操作，而值域则反映了函数可能产生的所有输出值。

函数的唯一性 (Uniqueness) 函数的唯一性要求在给定的定义域内，每一个元素只能与一个唯一的值对应，即函数值唯一；如果一个元素在定义域内对应多个值，那么这就不是一个函数，而是一个多值函数或关系。

- 把这段图像沿 x 轴方向平移 T ，得到的图像与原图 **完全重合**

换句话说：函数图像会按长度 T 周期性重复出现。

3. 周期、周期函数、最小正周期的定义

周期与周期函数 对于函数 $y = f(x)$ ，若存在一个非零常数 T ，使得 x 取定义域内的任何值时， $f(x + T) = f(x)$ 成立，则函数 $y = f(x)$ 叫 **周期函数**，不为零的常数 T 叫这个函数的 **周期 (Period)**

- 周期函数的定义域一定是 **无限集**
- 由周期函数的定义可知，0 不能作为函数的周期
- 如果 T 是 $f(x)$ 是它的一个周期，那么 $-T$ 也是 $f(x)$ 的周期，即周期可以为 **负值**
- 如果 T 是 $f(x)$ 是它的一个周期，那么 nT 也是 $f(x)$ 的周期，即周期函数有 **无数个** 周期

最小正周期 如果 $f(x)$ 为周期函数，且所有的周期中存在一个最小的正数，则这个最小正数叫 $f(x)$ 的 **最小正周期**

注意 周期函数 $f(x)$ 不一定含有最小正周期，如常数函数的周期为任意实数。

三. 描点法作图几何直观化抽象函数性质

在考题中，我们常常遇到一些形式看似抽象的代数条件，如

$$f(x + a) = -\frac{1}{f(x)}$$

如果只从代数角度理解，这些式子往往比较难以把握函数的整体结构。然而，从 **几何图像** 的角度来看，这些条件其实对应着一些非常直观的图形变换；因此，一个非常有效的思路是：

先把代数条件转化为图像的几何变换，再通过草图理解函数的整体结构。

这种方法在研究函数性质时尤其有用，例如判断：周期、对称性、图像结构；很多时候，只需要画出一小段 **基本图形**，再通过对称或平移，就可以得到整个函数图像。本书将介绍一种通用方法：

条件 → 几何意义 → 草图 → 推出性质

通过这种方式，可以更直观地理解函数的周期性和对称性。

特别说明 该类抽象函数题型实际上在高考中出现的极少，且已经出现的难度都非常的低，但在模考中出现次数很多，因此建议学习该部分时将重心放在 分析思想 上，而非功利的把此分析方式与其题型对应。

几何直观化的步骤

STEP 1 整理条件 把函数关系式进行最简化，让其尽可能的直观、简洁（若条件已十分直观，可跳过此步）

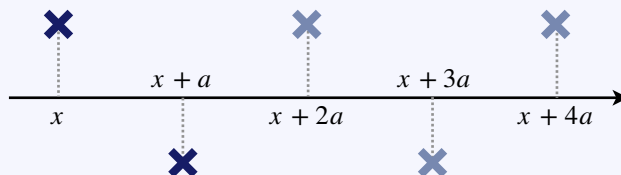
STEP 2 初始化 选定最初锚点 (×)

STEP 3 迭代 依据函数关系式的几何意义对锚点进行迭代，用 **描点法** 作出函数图像

STEP 4 观察结论 观察整体图像得到函数性质

举例1 $f(x + a) = -f(x)$ ，求 $f(x)$ 的周期。

分析 STEP 1 整理条件为 $f(x) = -f(x + a)$



STEP 2 根据方程意义可知， x 处的函数值与 $x + a$ 处的函数值互为相反数，做出 **初始锚点 (深紫色)**

STEP 3 依据规律进行迭代，作出 **后续锚点 (浅紫色)**

STEP 4 观察点的走向与规律可知，周期为 $2a$

过程 $f(x + 2a) = -f(x + a) = f(x)$ ，故周期为 $2a$ 。

举例2 $f(x + a) = \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}$ ，求 $f(x)$ 的周期。

分析 STEP 1 整理条件 $f(x + a) = \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)} = \frac{1 + \frac{1 - f(x - a)}{1 + f(x - a)}}{1 - \frac{1 - f(x - a)}{1 + f(x - a)}} = -\frac{1}{f(x - a)}$ ，即

运算方式综合 将奇偶性、 π 性、互余性综合运用，即可完全平替需要课本上记忆的公式，运用时遵循以下原则：

括号内的角度往区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 化简

EXAMPLE 1 已知 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ，化简： $\sin(\alpha + \frac{3\pi}{2}) - \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) + \tan(\pi - \alpha)$.

解析

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \frac{3\pi}{2}) - \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) + \tan(\pi - \alpha) &= -\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) - \sin \alpha - \tan \alpha \\ &= -\cos(-\alpha) - \sin \alpha - \tan \alpha \\ &= -\cos \alpha - \sin \alpha - \tan \alpha \\ &= -1 - \sqrt{2}.\end{aligned}$$

EXAMPLE 2 已知 $\sin(\frac{\pi}{3} - x) = \frac{3}{5}$ ，求 $\cos(x + \frac{7}{6}\pi)$ 的值.

解析

$$\cos(x + \frac{7}{6}\pi) = -\cos(x + \frac{\pi}{6}) = -\sin(\frac{\pi}{3} - x) = -\frac{3}{5}.$$

EXAMPLE 3 已知 α 的终边过点 $(-1, -2)$ ；

(1) 求 $\cos \alpha$ 及 $\tan \alpha$ 的值.

(2) 化简并求 $\frac{\sin(\pi - \alpha)\cos(2\pi - \alpha)\sin(-\alpha + \frac{3\pi}{2})}{\tan(-\alpha - \pi)\sin(-\pi - \alpha)}$ 的值.

解析

(1) 设 x 轴负半轴 α 终边的夹角为 β ，与 $\cos \alpha = \cos(\pi + \beta) = -\cos \beta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ ， $\tan \alpha = \tan \beta = 2$.

$$(2) \frac{\sin(\pi - \alpha)\cos(2\pi - \alpha)\sin(-\alpha + \frac{3\pi}{2})}{\tan(-\alpha - \pi)\sin(-\pi - \alpha)} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha \cdot (-\cos \alpha)}{-\tan \alpha \sin \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\tan \alpha} = \frac{1}{10}.$$

6. 恒等变换（和差角与二倍角公式）

三角恒等式是指对于任意角度的三角函数，存在一些等式使得这些函数之间的关系成立。这些恒等式对于解决三角函数的问题、简化表达式以及进行三角方程的求解都非常有用。以下是一些常见的三角恒等式：

和差角公式 是用来展开三角函数中的和差角的表达式的公式。在三角函数中，和差角指的是两个角的和或差。和差角公式分别适用于正弦、余弦和正切函数。以下是和差角公式的表达：

1. 正弦函数的和差角公式

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B, \quad \sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

2. 余弦函数的和差角公式

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B, \quad \cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

3. 正切函数的和差角公式

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}, \quad \tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

这些公式可以帮助简化三角函数中的复杂表达式，使得对角和角差的计算更加方便。在解决三角函数的问题时，和差角公式是一种常用的工具。

二倍角公式 令将恒等变换中 $A = B = \theta$ 即可得到二倍角公式，二倍角公式用于计算一个角的两倍大小的三角函数值。对于任意角 θ ，二倍角公式可以表示为：

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

7. 辅助角公式

辅助角公式是三角函数中的一个重要公式，用于简化含有不同角度的三角函数和的形式。具体地说，对于给定的实数 a 、 b 和任意角度 x ，辅助角公式为：

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi)$$

其中， φ 是一个常数，被称为 **辅助角**

证明 为了求解 φ 这个常数，我们可以利用三角恒等式，具体来说，可以使用三角函数的和差化积公式，将左侧的表达式转化成右侧形式。首先，我们考虑右侧的表达式：

$$\sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi)$$

使用和差角公式：

$$\sqrt{a^2 + b^2} (\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi)$$

根据三角函数的定义，我们知道 $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 和 $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ，代入这两个表达式，得到：

$$\sqrt{a^2 + b^2} \left(\sin x \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \cos x \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

简化后得到 $a \sin x + b \cos x$ ，这与原始表达式相同。因此，我们证明了辅助角公式。

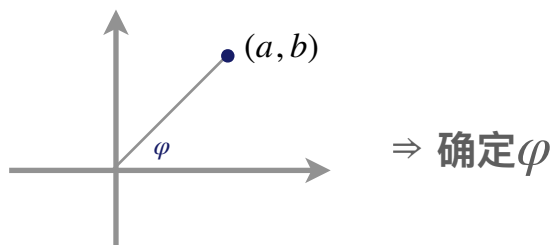
总结一下，**辅助角公式**

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi)$$

φ 是一个常数，满足 $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 和 $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 。

8. 辅助角公式的优化运算—单位圆建模

通过细致观察辅助角公式， $\sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi)$ 中“ $\sqrt{a^2 + b^2}$ ”部分即 $\sin x$ 与 $\cos x$ 系数平方和开根号，而对于 φ 的确定，我们不难发现 $\tan \varphi = \frac{b}{a}$ ，由此我们可以抽象出一种快速确定的方法：



1. 把 $a \sin x + b \cos x$ 中 $\sin x$ 的系数当成横坐标， $\cos x$ 的系数当成纵坐标，得到点 (a, b) ；
2. 将 (a, b) 与原点相连的直线为 l ，该直线与 x 轴所夹角即为 φ 。

例如 计算 $\sin x + \cos x$ 时，直线 l 过 $(1, 1)$ ，故 l 与 x 轴的夹角为45度，故原式等于 $\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$ ；

计算 $\sqrt{3} \sin x - \cos x$ 时，直线 l 过 $(\sqrt{3}, -1)$ ，故 l 与 x 轴的夹角为-30度，故原式等于 $2 \sin(x - \frac{\pi}{6})$ 。

通过这种直观的方法在使用辅助角公式时可以大大减小思维量，增快运算速度

EXAMPLE 1 (2025·新高考II) 已知 $f(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$ ，设 $g(x) = f(x) + f(x - \frac{\pi}{6})$ ，求 $g(x)$ 的值域和单调区间。

解析

$f(x - \frac{\pi}{6}) = \cos 2x$ ，故 $g(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{3}) + \cos 2x$ ，利用余弦函数的和差角公式展开 $\cos(2x + \frac{\pi}{3})$ 得

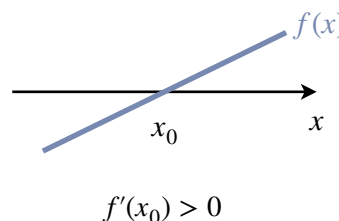
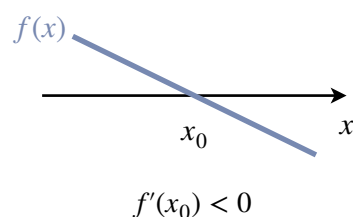
$$g(x) = \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \cos 2x = \frac{3}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x = \sqrt{3} \cos(2x + \frac{\pi}{6})$$

故值域为 $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ ，递增区间为 $[-\frac{7}{12}\pi + k\pi, -\frac{\pi}{12} + k\pi)$ ，递减区间为 $[-\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{5}{12}\pi + k\pi)$ ， $k \in \mathbb{Z}$ 。

4. 速率的局部影响（保号性）

当 $f(x_0) = 0$ 时

点 $(x_0, 0)$ 是函数图像与 x 轴的交点



— $f'(x_0) > 0 \rightarrow$ 切线斜率为 **正** $\rightarrow$ 图像 **向上** 穿过 x 轴

— $f'(x_0) < 0 \rightarrow$ 切线斜率为 **负** $\rightarrow$ 图像 **向下** 穿过 x 轴

因此，导数不为 0 的零点一定是 **穿越型零点**。

5. 极值点 (Extreme Points)

极小值点 函数在某个点附近的取值最小的点称为极小值点。具体地说，如果函数 $f(x)$ 在 $x = c$ 处的邻域内满足对于所有 x 且 x 足够接近 c ，有 $f(x) \geq f(c)$ ，则 $x = c$ 是函数的一个极小值点。

极大值点 函数在某个点附近的取值最大的点称为极大值点。具体地说，如果函数 $f(x)$ 在 $x = c$ 处的邻域内满足对于所有 x 且 x 足够接近 c ，有 $f(x) \leq f(c)$ ，则 $x = c$ 是函数的一个极大值点。

注意 极值点同时也包括函数的局部最小值和局部最大值，这些点可以是函数的局部极值，但不一定是全局极值； $x = c$ 处的邻域可以理解为在 $x = c$ 左右两侧一个特别小的区间 $[c - m, c + m]$ ，其中 $m \rightarrow 0$

6. 拐点 (Inflection Points)

拐点是函数图像上的一个点，函数在该点处的曲线 **由凹转凸或由凸转凹**。具体地说，如果函数 $f(x)$ 在 $x = c$ 处存在二阶导数，且二阶导数在 $x = c$ 处为零

$f''(c) = 0$ ，则 $x = c$ 是函数的一个 **拐点**

在拐点处，函数的曲线在该点的切线方向改变了凹凸性。

7. 极值点与拐点的判定

在拐点处，函数的曲线在该点的切线方向改变了凹凸性。拐点并不一定对应函数的极值点。确定函数的极值点和拐点通常需要进行一些计算和分析。下面是判定它们的一般步骤：

极值点的判定

STEP 1 找到函数的导数 $f'(x)$ 。

STEP 2 解方程 $f'(x) = 0$ ，得到函数的驻点（导数为零的点）。

STEP 3 通过二阶导数 $f''(x)$ 或者一阶导数 $f'(x)$ 的变化情况来判断每个驻点的性质：

- 如果 $f''(x) > 0$ ，则该点是极小值点；
- 如果 $f''(x) < 0$ ，则该点是极大值点；
- 如果 $f''(x) = 0$ ，则判定不明确，需要进一步的分析。

STEP 4 如果函数在端点处有定义，而恰巧端点是函数的驻点 x_0 ，但函数局部区域不会同时存在 $(x \rightarrow x_0^-)$ 与 $(x \rightarrow x_0^+)$ ，因此函数的端点不是极值点。

拐点的判定

STEP 1 找到函数的二阶导数 $f''(x)$ 。

STEP 2 解方程 $f''(x) = 0$ ，得到函数的可能的拐点。

STEP 3 对每个解 $x = c$ ，通过检查 $f''(x)$ 在 $x = c$ 的符号来判断拐点的性质：

- 如果 $f''(x)$ 在 $x = c$ 处由正转负，或者由负转正，或者三阶导数 $f'''(c) \neq 0$ ，则 $x = c$ 是拐点；
- 如果 $f''(x)$ 在 $x = c$ 处不变号，或者不存在二阶导数，则 $x = c$ 不是拐点。

三.速率与极限

1. 洛必达法则

洛必达法则 (L'Hôpital's Rule) 是微积分中的一项重要工具，用于求解极限的一种方法。该法则是由法国数学家Guillaume François Antoine, Marquis de l'Hôpital在1696年首次提出的，但实际上它是由约翰·伯努利 (Johann Bernoulli) 在给他的学生l'Hôpital的一封信中提出的，后者后来在他的书中将其归属给了自己。

特别注意 由于高中课程并未包含洛必达法则，因此在解答问题时不能直接引用该定理。我们必须通过导数定义的逆推方法来证明后续的推导过程。

洛必达法则的基本思想 当直接代入函数极限的方法 **无法得到确定的结果时**，可以通过对被除数和除数同时求导，然后再次计算极限，来简化极限的求解过程。洛必达法则适用于以下形式的不定型极限：

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

其中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在包含 c 的区间上可导，且 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ 或 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \pm \infty$ 。如果直接代入 c 后无法确定极限的值，可以使用洛必达法则。具体步骤如下：

- 首先，计算函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 c 处的导数 $f'(c)$ 和 $g'(c)$
- 如果 $f'(c)$ 和 $g'(c)$ 都存在且 $g'(c) \neq 0$ ，那么洛必达法则规定极限 $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$ 等于 $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

重复应用洛必达法则，直到可以直接求出极限或者得到极限不存在的结论为止。

注意 洛必达法则只适用于特定类型的极限问题，**不适用于所有情况**，在应用时需要谨慎，以确保条件符合要求。

洛必达法则1 (0/0)形式

$f(x)$ 和 $g(x)$ 在包含 c 的区间上可导，且 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ ，则

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

如果将 $x \rightarrow c$ 替换为 $x \rightarrow \pm \infty$ ， $x \rightarrow c^+$ 或 $x \rightarrow c^-$ ，该法则同样适用。

证明 $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{\frac{f(x)-f(c)}{x-c}}{\frac{g(x)-g(c)}{x-c}}$ 导数的定义

$$= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} \quad \text{同乘 } x-c$$

$$= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} \quad f(c)=g(c)=0$$

例 用洛必达法则计算下列极限。

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$

解析 a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}.$

洛必达法则2 (∞/∞)形式

$f(x)$ 和 $g(x)$ 在包含 c 的区间上可导，且 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \pm \infty$ ，则

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

如果将 $x \rightarrow c$ 替换为 $x \rightarrow \pm \infty$ ， $x \rightarrow c^+$ 或 $x \rightarrow c^-$ ，该法则同样适用。

CHAPTER 4

Plain Geometry & Vectors

平面几何与向量



章节目标 CHAPTER OBJECTIVES

本章旨在从“方程系统”的统一视角出发，重构三角形与平面向量的理解框架，将传统几何问题转化为结构清晰的代数问题，并反向用几何直观指导代数化简与建模。通过这一双向建模过程，建立“几何—代数—向量”三位一体的解题体系。

具体目标包括：

首先，理解三角形作为一个由六个变量（边与角）构成的约束系统，系统掌握内角和、正弦定理与余弦定理等基本约束方程，并能够从“方程求解”的角度解释解三角形问题的本质。进一步，通过构型固定与变量选择，优化代数表达与化简路径。

其次，掌握将三角表达式几何化的核心技巧，例如将“边 $\times$ 三角函数”转化为高、面积等几何量，并理解正弦定理所体现的齐次结构，从而提升表达式变形的直观性与可操作性。

再次，熟悉并灵活运用典型几何构型（如等腰一线构型、Stewart 构型、角平分线构型、腰高构型及“平方和隐圆”思想），建立构型驱动的解题策略。同时系统掌握三角形四心（重心、内心、外心、垂心）的性质与相互关系。

在向量部分，重点掌握平面向量的定义及其运算体系（加减、数量积等），理解其几何意义，并能够利用向量方法处理共线、共点及比例问题。通过三点共线定理与等和线定理，强化向量在几何证明中的应用能力。

进一步，建立常见几何结构的向量表达模型（如对称系数交换、极化恒等式、对角线向量定理及圆的向量表示），并深入理解奔驰定理及其在三角形四心问题中的应用，从而实现复杂几何关系的代数化处理。

总体而言，本章目标是培养将复杂几何问题“结构化—代数化—向量化”的能力，提高建模意识、运算效率与几何直觉的协同水平。

第一节 “方程系统”视角下的解三角形

一. “方程系统”角度理解三角形

1. 三角形 = 六个变量的约束系统

传统理解 三角形 = 一个图形

结构化理解

三角形 = 六个变量组成的系统 (a, b, c, A, B, C)

这6个量不是随意的，而必须满足一组约束，即约束方程定义的几何系统 (constraint-defined geometric system)

2. 约束方程（内角和、正弦定理、余弦定理）

设三角形为：边 a, b, c (SSS)，对应角 A, B, C (AAA)；

角度约束（结构约束）

$$A + B + C = 180^\circ$$

该约束涉及到 A, B, C 三个变量，该三个变量中若知道其中任意两个，即可求出第三个，而当三个角度都确定时，可以得到确定的三角形形状，即无数个形状一样但大小不同的三角形；换句话说

当任意两个角度已知时，角度约束让变量个数从 6 个降至 5 个。

例如 (2023·新高考I) 已知在 $\triangle ABC$ 中, $A + B = 3C$, $2 \sin(A - C) = \sin B$, 求 $\sin A$.

本质上就是三个约束关系

$$A + B = 3C, 2 \sin(A - C) = \sin B, A + B + C = \pi$$

三个方程三个未知数, 故每个变量均可求; 联立 $A + B = 3C$ 与 $A + B + C = \pi$ 得, $C = \pi/4$, 故

$$A + B = 3\pi/4$$

故 $2 \sin(A - \pi/4) = \sin(3\pi/4 - A)$, 即 $2 \sin(A - \pi/4) = \cos(A - \pi/4)$, 即 $\tan(A - \pi/4) = 1/2$,

$$\frac{\tan A - 1}{1 + \tan A} = 1/2, \tan A = 3$$

故 $\sin A = \frac{3}{10}\sqrt{10}$.

角度约束推论 正切恒等式

从正切加法公式出发

$$\tan C = \tan(\pi - A - B) = -\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{\tan A \tan B - 1}$$

化简得

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

边角关系 (核心几何约束-正弦定理)

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

边和角的正弦值之间存在比例耦合, 这是一个“全局约束” (所有变量同时绑定);

余弦定理 (非线性结构约束)

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

边之间存在二次关系, 本质是几何结构的代数表达; 特殊的, 当 $C = \pi/2$ 时, 即 $a^2 + b^2 = c^2$, 这是 **勾股定理**.

把所有约束合在一起, 你实际上在解:

一个线性方程 (角和)、一个比例关系 (正弦)、一个非线性方程 (余弦)

所有满足这些条件的 (a, b, c, A, B, C) , 构成 **三角形空间 (solution space)**.

3. 从“方程”角度看解三角形本质

你可以把三角形理解为一个映射关系:

输入 (已知 3 个量) $\rightarrow$ 输出 (完整三角形)

注意 要得到确定的三角形, **输入量不可重复**, 如已知的三个量为角度 (**AAA**) 的话, 则为重复输入, 因为已知两个角度可以根据角度约束得到另一个角度, 这导致输入量为 2, 得到的是形状一样但大小不同的多个三角形;

具体来说, 系统方程可能是单射 (一对一), 也可能不是单射 (一对多), 具体有以下几种情况

单射情况

— 已知三条边 (**SSS**)



三边确定时, 三角形形状固定, 可以通过余弦定理求出所有的角度

— 已知两边长度和两边夹角 (**SAS**)



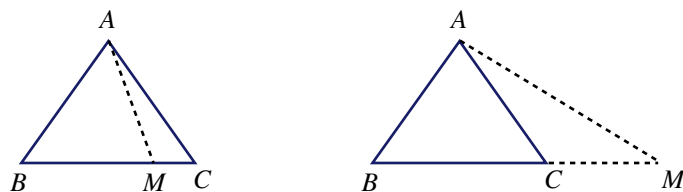
$$\frac{a}{4b} = \frac{\sin B}{\sin A} = \frac{b}{a}$$

得 $a = 2b$, 故 $b^2 + (2b)^2 = c^2 = 25$, $b = 1$, $a = 2$.

三.几何构型

1. 等腰一线构型

如图, $\triangle ABC$ 为等腰三角形, $B = C$, M 为直线 BC 上一点, 此时等腰 $\triangle ABC$ 与线段 AM 构成 **等腰一线** 构型;



几何系统 在该构型中, 共有6条线段 (变量):

$$AM, BM, CM, AB, BC, AC$$

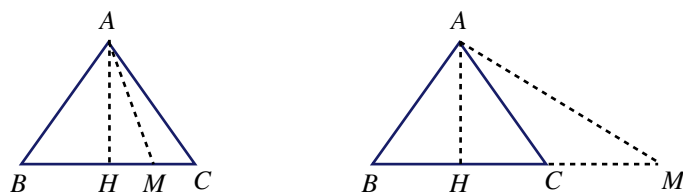
只要其中任意两条线段长度确定, 则所有线段长度均可求, 即在一个变量为6的系统下

知二得所有

而对于角度, $\triangle ABC$ 内只需要知道一个角, 就可以确定所有角, 从而确定 $\angle ACM$, 故只需在 $\triangle ACM$ 中再确定任意一个角, 则可固定形状.

约束条件 该6条线段互相约束, 可以利用勾股定理将约束显化; 过 A 作 $AH \perp BC$ 于 H , 则有两个直角三角形

$$Rt \triangle AHC, Rt \triangle AHM$$



以直角边 AH 为桥梁, 构建勾股定理方程:

$$AH^2 = AC^2 - CH^2 = AM^2 - MH^2$$

化简可得

$$AC^2 - AM^2 = BM \cdot CM \quad (M \text{ 在 } BC \text{ 上}), \quad AM^2 - AC^2 = BM \cdot CM \quad (M \text{ 在 } BC \text{ 外})$$

这即等腰一线构型的约束方程, 共有4个变量, 知道其中任意2个, 便可求出其余2个, 而当这4个变量均已知时, 构型中的六条线段均可求出; 更多地, 若只知道1个变量, 则可再设一个参数, 表示出其余所有变量.

例1 (2024·全国) 已知 $\triangle ABC$ 中, $A = \frac{\pi}{3}$, $AC = AB \tan B$.

(1) 求 B ;

(2) 求 $\sin A + \sin B + \sin C$.

分析 条件 $AC = AB \tan B$, 即

$$\tan B = \frac{b}{c}$$

考虑几何直观化 $\tan B$ 代表的比例关系, 过 A 作 $AH \perp AB$ 交 BC 于 H

例如 (2026·上海) 已知向量 $\vec{a} = (x, 3)$, $\vec{b} = (4, 6)$, $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 则 $x =$ _____.

解析 依题 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 故 $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$, 即

$$\frac{x}{4} = \frac{3}{6}, x = 2.$$

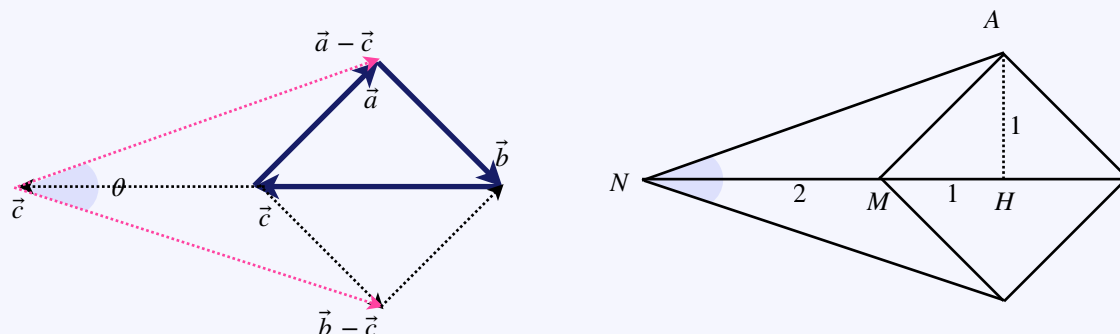
向量加减法的交换律与结合律 无论先加哪个向量, 结果都是相同的, 这意味着向量的顺序不影响它们的和, 故

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \text{ 且 } (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

特殊的, 若 $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n = \vec{0}$, 则表示首尾相接后回到原点, 所有的长度拼起来可以得到多边形;

例如 (2023·甲卷) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = \sqrt{2}$, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, 则 $\cos \langle \vec{a} - \vec{c}, \vec{b} - \vec{c} \rangle =$ _____.

解析 即 $|\vec{a}|, |\vec{b}|, |\vec{c}|$ 构成等腰直角三角形, 如图, 倍长 $\vec{c}$, 构造出 $\vec{a} - \vec{c}, \vec{b} - \vec{c}$, 即求 $\cos \theta$



根据几何性质可知, $\theta/2$ 非常好求, 设 $AH = MH = 1$, 则 $NM = 2$, $AN = \sqrt{5}$, 则

$$\cos(\theta/2) = \frac{NH}{AN} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\text{故 } \cos \theta = 2 \cos^2(\theta/2) - 1 = \frac{4}{5}.$$

3. 向量的乘法

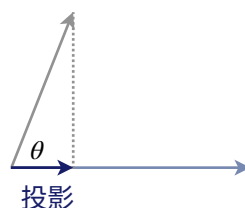
向量的数量积 (点积) 点积本质上表示: 一个向量在另一个方向上的“投影长度 $\times$ 对方长度”, 即

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \times (\vec{b} \text{ 在 } \vec{a} \text{ 方向上的投影})$$

具体来说, 若 $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$, 则

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

几何上, 也可以表示为:



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \theta$$

向量数量积可以用了求向量夹角, 例如 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (3, 4)$, 则夹角

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{3 + 8}{\sqrt{5} \cdot 5} = \frac{11}{25} \sqrt{5}$$

投影向量 如果我们希望得到投影的向量而不是其长度, 可以通过以下公式获得:

$$\vec{c} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \right) \vec{b}$$

$\vec{c}$ 是 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影向量, 其二维坐标形式为 $\left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_1^2 + x_2^2} \cdot x_1, \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_1^2 + x_2^2} \cdot y_1 \right)$

向量垂直的判定 当 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 时, $\cos \theta = 0$, 故 $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$

2. 极化恒等式

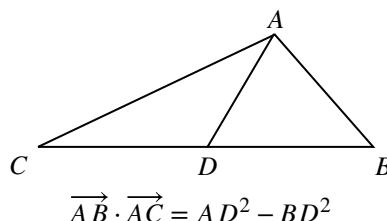
定义 对于任意实向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ ，其点积 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 可以通过以下方式表达

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$$

这个公式表明，一个向量空间中的内积可以通过 **向量的长度** 和 **它们之间的距离** 来表示。

证明 $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$, $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$, 相减即可.

极化恒等式的几何意义 在三角形 ABC 中， AD 是 BC 边上的中线，则



即向量的数量积可转换为

中线长与半底边长的平方差

推论 若 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = m$, $|BD| = n$, 则 $AD = \sqrt{n^2 + m}$, 即

A 在以 D 为圆心, $\sqrt{n^2 + m}$ 为半径的圆上运动

例1 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = 3$, $BC = 4$, $\angle C = 90^\circ$, P 为 $\triangle ABC$ 所在平面内的动点, 且 $PC = 1$, 求 $\vec{PA} \cdot \vec{PB}$ 的取值范围.

解析 记 M 为 AB 中点, $|PM| \in [\frac{3}{2}, \frac{7}{2}]$, 由极化恒等式 $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = \vec{PM}^2 - \vec{BM}^2 = |\vec{PM}|^2 - (\frac{5}{2})^2 \in [-4, 6]$.

例2 圆 $C: (x-a)^2 + (y+a)^2 = 2$, 点 $A(-1,0)$, $B(1,0)$, 圆 C 上存在点 P 使 $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = 1$, 求 a^2 的取值范围.

由极化恒等式 $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = \vec{PO}^2 - 1 = 1$, 故 $|PO| = \sqrt{2}$, 则在 $\triangle PCO$ 中, $PO - PC \leq CO \leq PO + PC$, 即

$$\sqrt{2} - 1 \leq CO \leq \sqrt{2} + 1$$

平方得 $3 - 2\sqrt{2} \leq 2a^2 \leq 3 + 2\sqrt{2}$, 故 $3/2 - \sqrt{2} \leq a^2 \leq 3/2 + \sqrt{2}$.

3. 对角线向量定理

定义 在四边形 $ABCD$ 中, 有

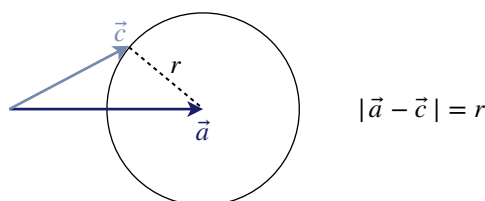
$$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = \frac{(\vec{AD}^2 + \vec{BC}^2) - (\vec{AB}^2 + \vec{CD}^2)}{2}$$

证明 构造 $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = (\vec{AO} + \vec{OC}) \cdot \vec{BD} = \vec{AO} \cdot \vec{BD} + \vec{OC} \cdot \vec{BD}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AD})(\vec{AD} - \vec{AB}) - \frac{1}{2}(\vec{CB} + \vec{CD})(\vec{CD} - \vec{CB}) \\ &= \frac{(\vec{AD}^2 + \vec{BC}^2) - (\vec{AB}^2 + \vec{CD}^2)}{2} \end{aligned}$$

4. 圆的向量表示

定义 在平面向量框架下, 圆可以通过“点到定点距离不变”来刻画



为便于代数运算, 常将距离形式平方, 得到:

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = (\vec{a}^2 + \vec{c}^2 - r^2)/2$$

若取直角坐标系, 将向量写为坐标形式 $\vec{a} = (x, y)$, $\vec{c} = (x_0, y_0)$, 则向量方程可转化为熟知的坐标方程

CHAPTER 5

Plural 复数

章节目标 CHAPTER OBJECTIVES

本章旨在建立复数的基本概念体系，理解虚数单位 i 的定义及其运算规则，掌握复数的一般形式 $z = a + bi$ ，并能够准确区分实数与纯虚数。在此基础上，进一步明确复数相等的判定条件，能够通过比较实部与虚部来解决含参数问题，同时熟练进行复数的基本代数运算。

通过引入复平面，学习者应理解复数与平面点之间的一一对应关系，从而将复数从纯代数对象拓展为具有几何意义的表示，既可以看作平面上的点，也可以看作向量。结合这一视角，掌握复数模的定义及其几何解释（表示到原点的距离），并能够利用这一性质解决相关的最值问题。

进一步地，本章要求掌握共轭复数的定义与性质，理解其在运算化简中的作用，能够灵活运用共轭处理含有复数的表达式。在表示形式方面，学习者需要掌握复数的三角形式，理解模与辐角（特别是辐角主值）的概念，并能够实现代数形式与三角形式之间的相互转化。

在此基础上，引入欧拉公式，建立复指数函数与三角函数之间的联系，使学习者理解复数的指数形式及其结构意义。通过这些内容的学习，应逐步形成从代数表示、几何表示到三角（指数）表示的统一认知框架，提升在不同表示之间转换的能力，并能够综合运用这些方法解决复数相关的计算与简单应用问题。

一言以蔽之，本章核心目标是：

建立复数的多重表示体系（代数 + 几何 + 三角），并能在不同表示之间灵活转换与应用。

第一节 复数的概念

一. 虚数单位与复数

复数 (Complex Number) 是数学中一个非常迷人且强大的概念。它将数系从一维的直线扩展到了二维的平面，解决了许多在实数范围内无法处理的问题。我们可以从以下几个核心维度来拆解它：

1. 虚数单位

在实数世界里，我们知道任何实数的平方都不可能是负数（例如 $2^2 = 4$, $(-2)^2 = 4$ ）。这就导致像 $x^2 = -1$ 这样的方程在实数范围内是无解的。

虚数单位 为了打破这个僵局，数学家引入了一个“虚构”的单位：

虚数单位 i ，定义： $i^2 = -1$

有了 i ，所有的二次方程就都有解了。

2. 复数的构成

一个标准的复数通常写成 $z = a + bi$ 的形式：

实数 a ：实部 (Real part)

实数 b ：虚部 (Imaginary part)

当 $b = 0$ 时， z 就是一个纯实数

当 $a = 0, b \neq 0$ 时， z 被称为纯虚数

EXAMPLE 8 (2021·甲卷) 已知一个圆锥的底面半径为6, 其体积为 30π , 求该圆锥的侧面积.

解析

$$V = 30\pi = \pi \times 6^2 \times h/3, \text{ 解得 } h = \frac{5}{2}, \text{ 则 } l = \sqrt{6^2 + h^2} = \frac{13}{2}, \text{ 故 } S = \pi r l = 39\pi.$$

EXAMPLE 9 (2018·全国卷) 已知圆锥的顶点为 S , 母线 SA 、 SB 所成角的余弦值为 $\frac{7}{8}$, SA 与圆锥底面所成角为 45° , 若 $S_{\triangle SAB}$ 的面积为 $5\sqrt{15}$, 求该圆锥的侧面积.

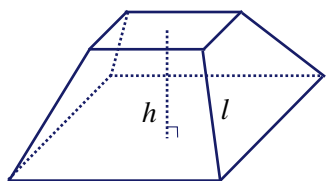
解析

$$\text{设夹角为 } \theta, \text{ 母线为 } l, \text{ 半径为 } r, \text{ 则 } \sin \theta = \sqrt{15}/8, \text{ 又 } S_{\triangle SAB} = (l^2 \sin \theta)/2 = 5\sqrt{15}, \text{ 解得 } l = 4\sqrt{5}, \text{ 又 } r = l \cos 45^\circ = 2\sqrt{10}, \text{ 故 } S = 2\pi r l = 40\sqrt{2}\pi.$$

3. 台体

台体 用一个 **平行于底面** 的平面去截锥体 (棱锥或圆锥), 去掉小锥体后剩下的部分; 主要分为 **棱台**、**圆台**:

a. 棱台: 上底面积 S_1 、下底面积 S_2 , 侧面积 S_3 、高 h 、斜高 l



棱台

体积	表面积
$V = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})h$	$S = S_1 + S_2 + S_3$
大棱锥-小棱锥	上底面积+下底面积+侧面积

用平行于底面的平面截正棱锥所得的棱台称为 **正棱台**.

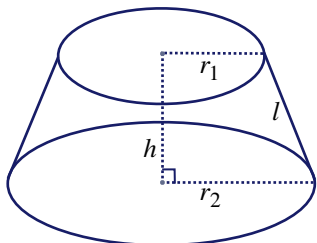
例 (2023·I卷) 在正四棱台 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $|AB| = 2$, $|A_1B_1| = 1$, $|AA_1| = \sqrt{2}$, 求该棱台的体积.

分析 过 A_1 作底面 $ABCD$ 的垂线, 垂足为 M , 连接 AM 和 A_1M , 则 $|AM| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 在 $Rt\triangle AMA_1$ 中,

$$|AM|^2 + |A_1M|^2 = |AA_1|^2$$

$$\text{解得 } |A_1M| = \frac{\sqrt{6}}{2}, \text{ 又 } S_1 = S_{ABCD} = 4, S_2 = S_{A_1B_1C_1D_1} = 1, \text{ 故 } V = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})|A_1M| = \frac{7\sqrt{6}}{6}.$$

b. 圆台: 上底半径 r_1 、下底半径 r_2 , 侧面积 S_3 、高 h 、母线 l



圆台

体积	表面积
$V = \frac{1}{3}(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)h$	$S = 2\pi(r_1 + r_2) + \pi(r_1 + r_2)l$
大圆锥-小圆锥	上底面积+下底面积+侧面积

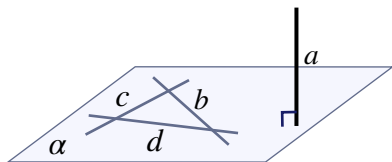
例 (2024·甲卷) 已知圆台甲、乙的上底面半径均为 r_1 , 下底面半径均为 r_2 , 圆台的母线长分别为 $2(r_2 - r_1)$, $3(r_2 - r_1)$, 求圆台甲与乙的体积之比.

分析 设两圆台的高分别为 h_1 , h_2 , 则

$$h_1 = \sqrt{4(r_2 - r_1)^2 - (r_2 - r_1)^2} = \sqrt{3}(r_2 - r_1), \quad h_2 = \sqrt{9(r_2 - r_1)^2 - (r_2 - r_1)^2} = 2\sqrt{2}(r_2 - r_1)$$

$$\text{故 } \frac{V_1}{V_2} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

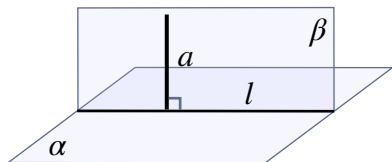
除此以外，直线与平面垂直还常用：若一条直线与一个平面垂直，则该直线与该平面内所有直线都垂直.



$$a \perp \alpha, \text{ 且 } b, c, d \subset \alpha \Rightarrow a \perp b, c, d$$

B. 平面与平面垂直

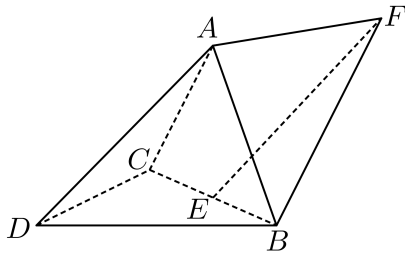
直线与平面垂直的性质定理 两个平面垂直，若一个平面内有一直线垂直于这两个平面的交线，则这条直线与另一个平面垂直.



$$\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = l, a \perp l \Rightarrow a \perp \alpha$$

由平面与平面垂直可以得到直线与平面垂直

例如 (2023·II卷) 如图，三棱锥 $A-BCD$ 中， $|DA| = |DB| = |DC|$ ， $BD \perp CD$ ， $\angle ADB = \angle ADC = 60^\circ$ ， E 为 BC 的中点.



(1) 证明： $BC \perp DA$ ；

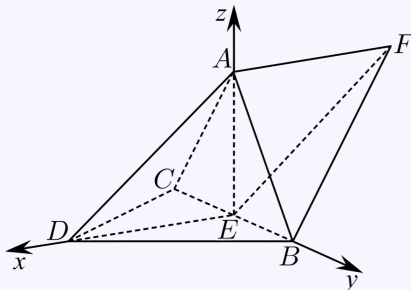
(2) 点 F 满足 $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DA}$ ，求二面角 $D-AB-F$ 的正弦值.

(1) **STEP 1** 找到目标直线所在平面垂直关系 易得 $DE \perp BC$ ， $\triangle ADC$ 、 $\triangle ADB$ 均为等边三角形，则

$|AC| = |AB|$ ，所以 $AE \perp BC$ ，又 $AE \cap DE = E$ ，所以 $BC \perp$ 平面 ADE .

STEP 2 用线面垂直的性质 又 $DA \subset$ 平面 ADE ，故 $BC \perp DA$ ；

(2) 设 $|AD| = 2$ ，因为 $BD \perp CD$ ，所以 $|BC| = 2\sqrt{2}$ ， $|DE| = |AE| = \sqrt{2}$ ，又 $|AE|^2 + |DE|^2 = |AD|^2$ ，所以 $AE \perp DE$ ，以 E 为原点，沿 ED 方向为 x 轴，沿 EB 方向为 y 轴， EA 方向为 z 轴建系，则



$$E(0,0,0), D(\sqrt{2},0,0), B(0,\sqrt{2},0), A(0,0,\sqrt{2}), F(-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$$

设平面 DAB 的法向量为 $\vec{n}_1$ ，又 $\vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ ，可取 $\vec{n}_1 = (1,1,1)$ ，同理可得平面 FAB 的法向量为

$$\vec{n}_2 = (0,0,1), \text{ 则 } |\cos \theta| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \text{ 故 } \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

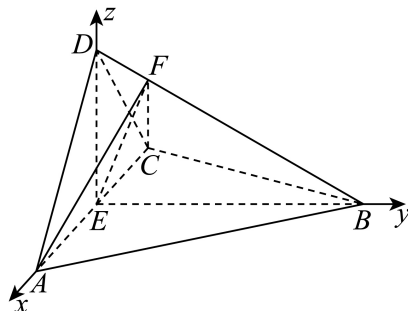
(1) 证明: 平面 $BED \perp$ 平面 ACD ;

(2) 设 $|AB| = |BD| = 2$, $\angle ACB = 60^\circ$, 点 F 在 BD 上, 当 $\triangle AFC$ 的面积最小时, 求 CF 与平面 ABD 所成的角的正弦值.

解析

(1) 因为 $\angle ADB = \angle BDC$, $|AD| = |CD|$, 所以 $DE \perp AC$, $\triangle ADB \cong \triangle CDB$, 则 $|AB| = |CB|$, 所以 $AB \perp AC$, 且 $DE \cap AB = E$, 可得 $AC \perp$ 平面 BED , 又 $AC \subset$ 平面 ACD , 故平面 $BED \perp$ 平面 ACD ;

(2) 以 E 为原点, 沿 EA 方向为 x 轴, EB 方向为 y 轴, ED 方向为 z 轴建系, 则



$$E(0,0,0), A(1,0,0), B(0,\sqrt{3},0), C(-1,0,0), D(0,0,1)$$

因为 $AC \perp$ 平面 BED , 所以 $S_{\triangle AFC} = \frac{|AC| \cdot |EF|}{2} = |EF|$, 当且仅当 $EF \perp DB$ 时取得最小值, 所以

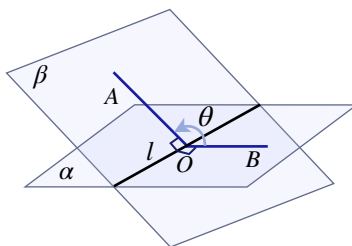
$\triangle DFE \sim \triangle EFB$, 即 $\angle EFB = \frac{\pi}{3}$, 可得 $|FE| = |BE| \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $F(0, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4})$, 设平面 ABD 的法向量为 $\vec{n}$, 又 $\vec{n} \cdot \vec{AD} = \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$, 可取 $\vec{n} = (\sqrt{3}, 1, \sqrt{3})$, 又 $\vec{CF} = (1, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4})$, 故

为 $\vec{n}$, 又 $\vec{n} \cdot \vec{AD} = \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$, 可取 $\vec{n} = (\sqrt{3}, 1, \sqrt{3})$, 又 $\vec{CF} = (1, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4})$, 故

$$\sin \theta = \frac{|\vec{CF} \cdot \vec{n}|}{|\vec{CF}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{4\sqrt{3}}{7}.$$

3. 平面与平面的夹角

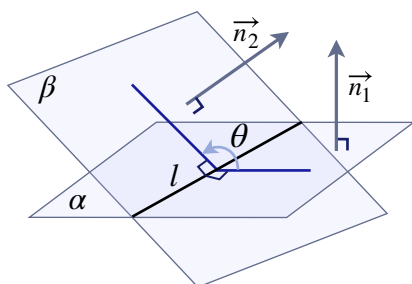
二面角 (Dihedral angle) 两个半平面所组成的图形称为二面角, $\angle AOB$ 为二面角的平面角。



取值范围 二面角的平面角的取值范围为 $[0, \pi]$, 平面角为直角的二面角称为直二面角。

二面角仍然会有锐角、直角、钝角之分, 在求二面角的大小时要注意

平面与平面夹角的向量公式 已知两平面 α 与 β 的夹角为 θ , 法向量分别为 $\vec{n}_1$ 和 $\vec{n}_2$, 则



$$|\cos \theta| = |\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

根据题目判断是锐二面角还是钝二面角, 再去绝对值得到二面角准确的余弦值

方法数= C_{n-1}^{m-1}

情况2 不选这个特殊元素 那就直接从剩下的 $n - 1$ 个元素中选 m 个：

方法数= C_{n-1}^m

所有情况加起来： $C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m = C_n^m$.

EXAMPLE 求 $C_4^3 + C_5^3 + \cdots + C_{10}^3$ 的值.

解析

$C_4^3 + C_5^3 + \cdots + C_{10}^3 = C_4^4 + C_4^3 + C_5^3 + \cdots + C_{10}^3 = C_5^4 + C_5^3 + \cdots + C_{10}^3 = C_{11}^4 - 1 = 329$.

双计数公式 我们来描述一个具体问题：从 n 个人中选出 m 个人，并且在这 m 个人中选一个“负责人”

方法一 先选人，再选负责人

先选 m 个人： C_n^m

再从这 m 人中选 1 个负责人： m

总方法数： mC_n^m

方法二 先定负责人，再选人

先选负责人（从 n 个人中选）： n

再从剩下的 $n - 1$ 人中选 $m - 1$ 人陪他： C_{n-1}^{m-1}

总方法数： $n \cdot C_{n-1}^{m-1}$

一言以蔽之，“负责人在组内选” = “负责人先定”，即

$mC_n^m = n \cdot C_{n-1}^{m-1}$

EXAMPLE 求 $C_{10}^1 + 2C_{10}^2 + \cdots + 10C_{10}^{10}$ 的值.

解析

$C_{10}^1 + 2C_{10}^2 + \cdots + 10C_{10}^{10} = 10(C_9^0 + C_9^1 + \cdots + C_9^9) = 10 \times 2^9 = 5120$.

3. 排列与组合核心差异对比

为了让你一眼看清区别，我们看这个简单的场景：从 A, B, C 三个人中选 2 个人.

类型	包含的情况	数量计算	特点
排列	AB, BA, AC, CA, BC, CB	$A_3^2 = 3 \times 2 = 6$	$\{A, B\} \neq \{B, A\}$ ，顺序敏感
组合	$\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}$	$C_3^2 = \frac{3 \times 2}{2 \times 1} = 3$	$\{A, B\} = \{B, A\}$ ，顺序无关

三.抽样问题

所有抽样问题，本质都是在做一件事：

在一个样本空间中，定义随机试验，并计算事件概率

核心三要素：

- 样本空间 (Ω)：所有可能结果
- 基本事件：每一种可能结果
- 概率模型：如何给这些结果分配概率

1. 无放回抽样（组合模型）

STEP 1 计算总数 有放回抽2次，每一次都有8个可抽，则有 $8^2 = 64$ 种

STEP 2 求编号和不小于15 考虑临界 $7+8=15$ ， $8+8>15$ ，则有3种，故

$$P(\text{取得两个球的编号和不小于15}) = 3/64$$

EXAMPL 3 (2020·江苏) 将一颗质地均匀的正方体骰子先后抛掷2次，观察向上的点数，求点数和为5的概率.

解析

总数 $6^2 = 36$ 种，考虑点数和为 $5=1+4=2+3$ ，则有4种，故 $P(\text{点数和为5}) = 1/9$.

四.限制性排列组合问题

1. 捆绑法

捆绑法 (Binding Method / Grouping Method) 是处理“相邻问题”最核心的策略，当题目要求 某些元素必须排在一起 时，我们可以通过“化零为整”的思路来简化问题。

核心思路：将受限的元素视作一个“整体”

STEP 1 捆绑成组：将要求相邻的元素看作一个大元素（想象用绳子把它们捆成一个球）

STEP 2 大排列：将这个“整体”与剩余的其他元素进行全排列

STEP 3 内排列：考虑被捆绑的“大元素”内部，各元素之间是否存在顺序关系。如果内部顺序不同代表不同方案，则需要进行内部全排列

EXMAPLE 1 (2019·全国卷) 两位男同学和两位女同学随机排成一列，则两位女同学相邻的概率是
将四位同学全排列，总情况有 $A_4^4 = 24$ 种，接下来考虑限制：

STEP 1 将两位女同学捆绑 此时排列总数变为3

STEP 2 将这个“两女的整体”与剩余的其他元素进行全排列 即 A_3^3 种

STEP 3 两位女同学内部全排列 即 A_2^2 种

故有限制的共 $A_3^3 \times A_2^2 = 12$ 种，故 $P(\text{两位女同学相邻}) = 12/24 = 0.5$.

EXAMPLE 2 (2022·II卷) 有甲、乙、丙、丁、戊5名同学站成一排参加文艺汇演，若甲不站在两端，丙和丁相邻，求不同排列方式.

解析

先让丙和丁捆绑，变为4人；再排甲不在两端，有2个位置可选，剩下全排列，则共有 $2A_3^3 \cdot A_2^2 = 24$ 种.

2. 插空法

既然我们刚聊完“抱团”的 **捆绑法**，那处理“死对头”问题的 **插空法 (Slot-filling Method)** 就是它的完美搭档；当题目要求 某些元素不能相邻（必须隔开） 时，插空法就是最有效的武器。

核心思路：先排弱者，再塞强敌

想象你在排队，有几个调皮的孩子总爱打架，不能站在一起。你的策略应该是：先让乖孩子排好，再让调皮的孩子钻进他们之间的缝隙里。

STEP 1 先排其他：将没有位置限制的元素（“乖孩子”）先排成一排。

STEP 2 寻找空位：在排好的元素之间、以及两头寻找可以插入的“空位”。如果有 n 个元素排好，产生的空位总数通常是 $n+1$ 个。

STEP 3 插入元素：从这些空位中选出几个，把要求不相邻的元素（“调皮孩子”）填进去。

6. 消序法与分组分配法

消序法（视为相同元素法）是解决定序排列问题的顶级杀招。它的核心哲学只有一句话：如果顺序已经定死了，那这几个元素就不再有“排列”的权利，只能乖乖“占座”。

EXAMPLE 假设有甲、乙、丙、丁、戊5个人排队，要求甲必须在乙的前面（不一定相邻）。

深度直觉 把“不同的人”看作“相同的球”

常规思维 你可能会想甲在第一位时乙有几种排法，甲在第二位时.....这会让你陷入无穷无尽的分类讨论。

消序思维 我们先把甲和乙看成两个完全一模一样的“白球”，丙、丁、戊还是正常人。

— 现在有5个位置，让2个白球和3个不同的人去排。



— 排完之后，无论那两个白球落在哪里（比如落在第2位和第4位），因为题目规定“甲在乙前”，你只需要把甲放进前面的白球，乙放进后面的白球即可。

— 结论：只要位置选定了，甲和乙的放法只有1种，他们的顺序性被“消除”了。

数学操作 先“全排”，再“除掉”

STEP 1 假装自由 5个人全排列，总数是 A_5^5 种。

STEP 2 消除乱序 既然甲乙两个人的内部排列 A_2^2 种里只有1种符合要求，我们就把总数乘以 $1/A_2^2$ ，即

$$A_5^5 / A_2^2$$

换句话说，某几个元素的相对顺序是固定的，不能打乱

$$\text{有效排列} = \frac{\text{总全排列}}{\text{定序元素的全排列}}$$

如果你觉得除法不好理解，可以换个思路：先占座，再填人，这叫做 **分组分配法**

— 现在有5个位置，让2个白球和3个不同的人去排。



— 因为顺序定了（甲前乙后），故只需要从5个位置中选出2个分配给白球，这就是 C_5^2 。

— 剩下3个人在剩下的3个位子上随便坐。这就是 A_3^3 。

结果： $C_5^2 \times A_3^3 = 10 \times 6 = 60$ ，这和用消序法算的结果是一模一样的： $\frac{A_5^5}{A_2^2} = \frac{120}{2} = 60$ 。

EXAMPLE 1 5个人排队，甲、乙、丙三人必须从左到右按身高递增顺序排列，有多少种排法？

解析

STEP 1 总排列数 五个人全排列有 $A_5^5 = 120$ 种

STEP 2 定序元素内部 甲乙丙三人内部原本有 $A_3^3 = 6$ 种

STEP 3 定序消除重复 只允许其中1种（递增）顺序，则有效排列有 $A_5^5 / A_3^3 = 20$ 种。

EXAMPLE 2 (2020·山东) 6名同学到甲、乙、丙三个场馆做志愿者，每名同学只去1个场馆，甲场馆安排1名，乙场馆安排2名，丙场馆安排3名，求不同的安排方法数。

解析

CHAPTER 8

Posibility 统计与概率

章节目标 CHAPTER OBJECTIVES

统计与概率回答的核心问题是：数据背后的随机规律是什么？本章的学习沿着三条递进的线索展开：

第一条：从样本到总体

怎么抽？简单随机抽样、系统抽样、分层抽样。怎么用？用样本的频率分布、百分位数、平均数、方差估计总体——核心思想是“用局部推断全局”。

第二条：从事件到概率

事件之间是什么关系？互斥（不能同时发生）、对立（必有一个发生）、独立（互不影响）。概率怎么算？古典概型“数清楚”，几何概型“量准确”，条件概率“已知部分信息后概率如何更新”——全概率公式“由因推果”，贝叶斯公式“由果溯因”。

第三条：从变量到分布

离散型随机变量用分布列描述，连续型用密度函数。期望反映“平均水平”，方差反映“波动大小”。常见分布必须区分：两点分布（一次试验）、二项分布（ n 次独立重复）、超几何分布（不放回抽样）、几何分布（首次成功所需次数）、正态分布（自然界最常见）。

最后，成对数据分析回答“两个变量有无关系”——散点图看趋势，相关系数定量衡量，回归模型预测，独立性检验判断。本章的核心能力不是背公式，而是根据实际问题选择正确的模型。掌握了这条主线，统计与概率就不再是零散的知识点，而是一套完整的不确定性思维框架。

第一节 随机抽样与用样本估计总体

一. 样本与总体

在统计学中，总体和样本是两个核心概念。它们决定了不同统计量的计算方式以及符号的使用。

总体 (Population) 是指所有可能的观测值或研究对象的集合。在实际应用中，研究的总体可能非常大，甚至无法完全列举。例如，某个国家所有居民的收入构成总体。

样本 (Sample) 是从总体中抽取的一部分观测值。因为总体通常非常庞大，我们通常通过对样本进行分析来推断总体的特性。样本是总体的一个子集，通过合理的抽样方法，样本能够代表总体的特征。

样本点 (Sample points) 是在概率论和统计学中用于描述随机试验或随机现象的结果的基本元素。每一个样本点代表一个可能的结果或观察值。样本点的集合称为**样本空间 (sample space)**，通常用字母 S 表示。

例如 如果你掷一枚公平的六面骰子，样本空间 S 包含的样本点是：

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

统计中，总体的统计量通常用希腊字母表示，称为**总体参数 (Population Parameter)**，样本的统计量通常用拉丁字母表示，称为**样本参数 (Sample Parameter)**

统计量	总体符号	样本符号	解释
均值 (Mean)	μ	$\bar{x}$	数据的平均值
方差 (Variance)	σ^2	s^2	数据的离散程度（数据与均值的偏离程度）

3. 集中趋势的估计

平均数 (Mean) 总体平均数 (数学期望)

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

样本平均数 (用于估计总体)

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

样本平均数 $\bar{x}$ 是总体均值 μ 的 **估计量**。

特点 利用了全部数据，信息最充分，但对极端值非常敏感，在正态分布下效果最佳。

中位数 (Median) 将数据从小到大排序后：

若 n 为 **奇数**，则中位数为排序最居中的那个数

$$\text{Median} = x_{(2n+1)/2}$$

例如 对于数据集[3,5,7]，中位数是5。

若 n 为 **偶数**，则中位数为排序最居中的那两个数的平均值

$$\text{Median} = (x_n + x_{(2n+1)/2})/2$$

例如 对于数据集[2,4,6,8]，中位数是 $(4+6)/2=5$ 。

特点 不受极端值影响 (稳健性强)；只利用排序位置，不考虑具体数值大小。

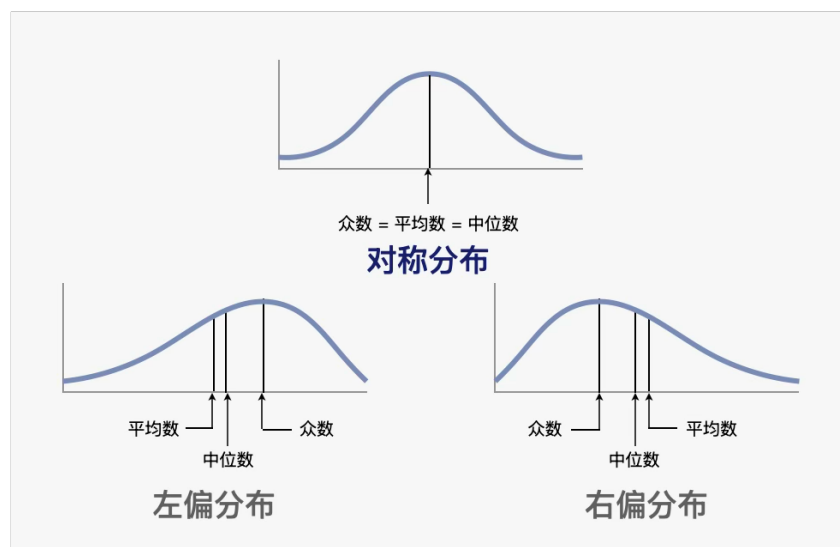
众数 (Mode) 数据中 **出现频率最高** 的值，但可能：

- 无众数 如果一个数据集中只有一个值的出现频率最高，它就有一个众数，称为 **单众数分布**
- 单众数 如果多个值的出现频率相同且都是最高的，数据集就有多个众数，称为 **多众数分布**
- 多众数 (多峰分布) 如果每个值的出现频率相同，则这个数据集没有众数

三者比较

指标	利用信息	是否受极端值影响
平均数	全部数据	敏感
中位数	排序位置	不敏感
众数	频数	不敏感

分布形态与三者关系



由于三种统计量“看数据的方式”不同：

平均数：对所有数值做 **加权平均** (权重=1/n) → 对极端值高度敏感 (尾部会“**拉动**”它)

2. 概率的性质

概率的有界性 在样本空间 Ω 中，对于任意事件 A

$$0 = P(\emptyset) \leq P(A) \leq P(\Omega) = 1$$

单调性 若 $A \subseteq B$ ，则：

$$P(A) \leq P(B)$$

直观理解 事件越“宽”，概率越大

三. 古典概型

1. 古典概型的定义

古典概型 (Classical Probability Model) 一个随机试验如果满足：

样本空间是 **有限的**（只有有限个可能结果）、每个基本结果发生的 **可能性相等**

那么这个试验就构成一个 **古典概型**。

概率公式 在古典概型中，事件 A 的概率计算公式为：

$$P(A) = \frac{\text{有利结果数}}{\text{所有可能结果数}}$$

其中，“有利结果数”为事件 A 中包含的基本结果数量，“所有可能结果数”为样本空间中所有基本结果的总数。

古典概型的适用前提 必须满足两个关键条件：

有限性 样本空间不能是无限的

等可能性 每个基本结果发生概率相同

2. 古典概型—利用利用等可能性+对称性优化的枚举过程

在古典概型中，样本空间有限、每个基本事件等可能，因此概率计算的核心是：

$$P(A) = \frac{\text{满足A的样本数}}{\text{总样本数}}$$

直接枚举样本数的困难在于：

- 样本数爆炸（组合爆炸）
- 需要逐个列举所有情况

因此，在 **结构完全对称** 的情况下，不需要区分“具体是哪一个”，可以固定一个代表情况，即

只看相对关系，不再关心绝对编号

例如（2023·乙卷）某学校举办作文比赛，共6个主题，每位参赛同学从中随机抽取一个主题准备作文，则甲、乙两位参赛同学抽到不同主题概率为_____。

STEP 1 先固定甲的结果 甲抽到任意一个主题（不影响概率），概率可看作 1

STEP 2 乙抽到“不同主题” 总共有 6 个主题，已有 1 个被甲占用，剩下 5 个“不同主题”，因此：

$$P(\text{乙与甲不同}) = 5/6.$$

当然，我们也可以从反面分析，要求甲、乙抽到不同主题的概率，不妨先求甲、乙抽到 **相同** 主题的概率：

$$P(\text{乙与甲相同}) = 1/6$$

故 $P(\text{乙与甲不同}) = 1 - P(\text{乙与甲相同}) = 5/6$.

根据这个思想，我们还可以非常方便的解决一个著名问题——“生日悖论”（简化版）

生日悖论 设有 n 个人，每个人的生日在一年中的 365 天中等可能（忽略闰年），且相互独立。求：至少有两个人生日相同的概率

直接求“至少有一对相同”很难，因此我们用：

$$P(\text{至少一对相同}) = 1 - P(\text{全部不同})$$

我们计算 $P(\text{全部不同})$,

STEP 1 固定第1个人的生日

第1个人：任意一天（不影响概率），视为“基准”

STEP 2 第2个人 要和第1个人不同

$$\frac{364}{365}$$

STEP 3 第3个人 要和前2个人不同

$$\frac{363}{365}$$

以此类推

$$P(\text{全部不同}) = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdots \frac{365-n+1}{365}$$

代入不同的 n 值可得：

人数 n	至少两人同生日的概率
10	$\approx 11.7\%$
20	$\approx 41.1\%$
23	$\approx 50.7\%$
30	$\approx 70.6\%$
50	$\approx 97.0\%$

只需要 23 个人，两人生日相同的概率就超过 50%，这就是所谓的“悖论”；关于改概率的通项，我们可以利用概率期望+定义指标变量求出，请查看本书其他相关章节。

EXAMPLE 1 (2025·上海) 有一四边形 $ABCD$ ，对于其四边 AB, BC, CD, DA ，按顺序分别抛掷一枚质量均匀的硬币：如硬币正面朝上，则将其擦去；如硬币反面朝上，则不擦去。最后，以 A 为起点沿着尚未擦去的边出发，可以到达 C 点的概率为_____。

解析

该题擦去四边的概率都是等可能的，是一个标准的古典概型，共有 $2^4 = 16$ 种情况，要从 A 到达点 C ，必须要保留以下两种路径中的其中一种：

$$A \rightarrow B \rightarrow C, A \rightarrow D \rightarrow C$$

若保留 $A \rightarrow B \rightarrow C$ ，则 CD, DA 可保留也可擦去，共有 $2 \times 2 = 4$ 种情况；

若保留 $A \rightarrow D \rightarrow C$ ，则 AB, BC 可保留也可擦去，共有 $2 \times 2 - 1 = 3$ 种情况（其中四边都保留的情况与上面重复）；

则要从 A 出发沿着尚未擦去的边能到达点 C ，共有7种情况，故可以到达 C 点的概率为 $P = \frac{7}{16}$ 。

EXAMPLE 2 (2023·甲卷) 某校文艺部有4名学生，其中高一、高二年级各2名。从这4名学生中随机选2名组织校文艺汇演，则这2名学生来自不同年级的概率为_____。

解析

来自高一/高二的结构是完全对称的，故我们只需固定第一名学生来自高一，再求第二名学生来自高二的概率，即 $P = \frac{2}{3}$ 。

EXAMPLE 3 (2014·新课标II) 甲、乙两名运动员各自等可能地从红、白、蓝3种颜色的运动服中选择1种，则他们选择相同颜色运动服的概率为_____。

解析

“同一种衣服是什么颜色”结构是完全对称的，故我们只需固定他们都选择红色的概率为 P ，所求概率即 $3P$ ，而 $P = (1/3)^3 = 1/9$ ，故 $3P = 1/3$ 。

A, B独立 A, B 互不影响, 故 A, B 处于不同纬度, 用两个互相垂直的竖条表示 (A 左边竖条, B 下边横条); A 的宽度 = $P(A)$, B 的高度 = $P(B)$, 交集面积占总面积1的比例, 即 A, B 同时发生的概率 $P(A \cap B)$, 而:

$$\text{交集面积} = \text{宽} \times \text{高}$$

故 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

3. 几何化与条件概率、全概率公式、贝叶斯公式

定义 设 A, B 是两个事件, 则 $P(A | B)$ 表示在事件 B 已经发生的条件下, A 发生的概率

关键点有两个:

已知 B 发生 $\rightarrow$ 信息更新

在这个前提下重新计算概率

本质 归一化 概率空间的“收缩”, 条件概率不是简单计算, 而是一个 结构变化:

原来 我们在整个样本空间 Ω 上讨论概率,

现在 只在 B 内讨论问题, $P(B)$ 被当成新的“1”

换句话说, 就是把概率空间限制到 B , 然后重新归一化, 即

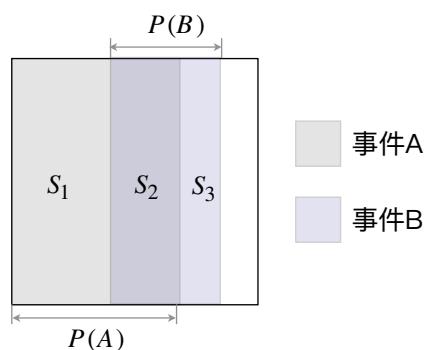
$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

几何理解 在单位正方形模型中, 条件概率 $P(A | B)$ 就是:

在 B 这块区域里, A 占的面积比例

也就是, 分子为交集面积, 分母为 B 的面积.

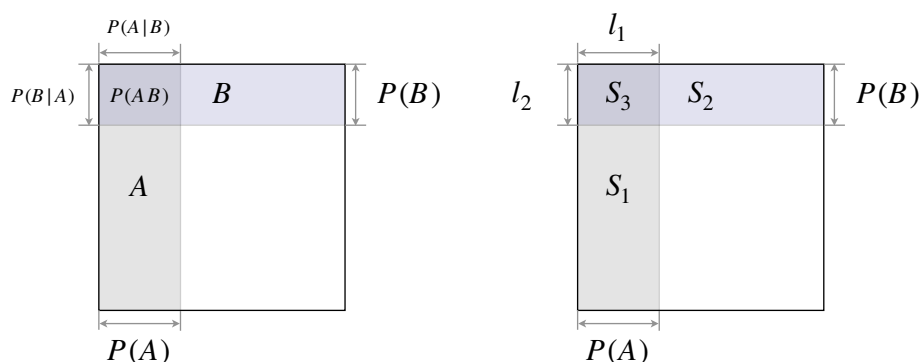
情况1 当 A, B 不独立时



如图, $P(A) = S_1 + S_2$, $P(B) = S_2 + S_3$, $P(A \cap B) = S_2$, 条件概率 $P(A | B)$ 即事件 B 已经发生的条件下, A 发生的概率, 也就是公共区域 (S_2) 占事件 B ($S_2 + S_3$) 的比例, 即

$$P(A | B) = \frac{S_2}{S_2 + S_3} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

情况2 当 A, B 相互独立时



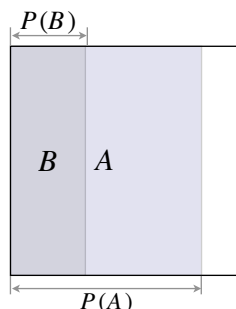
由图可知, $P(A) = l_1 = S_1$, $P(B) = l_2 = S_2$, 而条件概率即

$$P(A | B) = \frac{S_3}{S_2}, \quad P(B | A) = \frac{S_3}{S_1}$$

而 $S_3 = I_1 I_2 = P(A)P(B) = P(AB)$, 故

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A), \quad P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = P(B)$$

特殊情况3 当 $B \subseteq A$ 时 由面积关系可知, $P(AB) = P(B)$, $P(B|A) = P(B)/P(A)$, $P(A|B) = 1$.



情况3 全概率公式

设事件 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 构成一个 **完备事件组** (也叫“划分”), 满足:

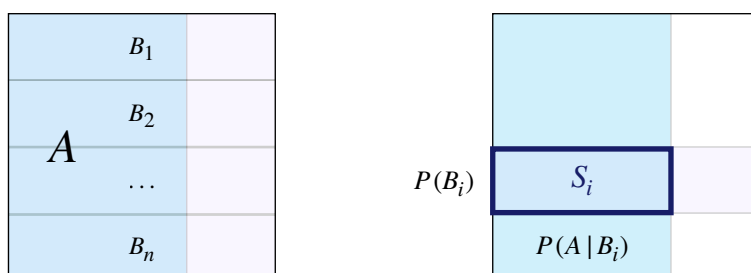
- 两两互斥: $B_i \cap B_j = \emptyset$
- 覆盖全集: $B_1 + B_2 + \dots + B_n = \Omega$

那么对于任意事件 A , 有:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$

直观理解 把事件 A 的发生路径, 按不同的“分组条件” B_i 拆开统计, 即在每一种可能的情境 B_i 下, A 发生的概率是 $P(A|B_i)$, 再乘上这种情境本身发生的概率 $P(B_i)$, 最后把所有情况加起来

从几何角度来理解



$P(A)$ 是多个 S_i 相加而得到, 而 S_i 的长为 $P(A|B_i)$, 宽为 $P(B_i)$, 故

$$S_i = P(B_i) \cdot P(A|B_i)$$

$$\text{故 } P(A) = \sum_{i=1}^n S_i = \sum_{i=1}^n P(A|B_i) \cdot P(B_i).$$

贝叶斯公式 我们把条件概率中的 $P(AB)$ 当作桥梁, 构建 $P(A|B)$ 和 $P(B|A)$ 的等式, 即可得到贝叶斯公式

$$P(B|A) = P(B) \frac{P(A|B)}{P(A)}$$

它用于计算在已知某一事件发生的条件下, 另一事件发生的概率:

先验概率 $P(B)$ 事件 B 发生的概率

后验概率 $P(B|A)$ 在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的概率

似然 $P(A|B)$ 在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的概率

贝叶斯因子 $\frac{P(A|B)}{P(A)}$ 表示了观测到数据 B 之后, 我们对事件 A 的概率估计相对于先验概率 $P(A)$ 的变化程度

- 如果这个比值大于1, 说明观测数据增强了事件 A 发生的可能性
- 如果小于1, 说明观测数据减少了事件 A 发生的可能性
- 如果等于1, 观测数据对事件 A 的发生概率没有影响

三.离散型随机变量的数字特征

1. 数学期望 (Mathematical Expectation)

定义 离散型随机变量 X 的分布列为

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

称为离散型随机变量 X 的 **均值** 或 **数学期望**，简称期望。

例如 (2025·上海卷) 已知随机变量 X 的分布列为 $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$ ，求期望 $E(X)$ 。

$$E(X) = 5 \times 0.2 + 6 \times 0.3 + 7 \times 0.5 = 6.3$$

数学期望的意义 数学期望是从过往经验中总结出的 **长期平均水平**；如果重复进行某件事，平均来看，结果会 **趋近于这个值**；

正因如此，期望成为我们预判未来时的重要依据——它不是对单次结果的承诺，而是对 **长期趋势** 的理性预期。

2. 数学期望的性质

线性性质 若 X 是一个离散型随机变量， a 、 b 都是任意实数，则

$$E(a \cdot X + b) = a \cdot E(X) + b$$

证明 设 $Y = aX + b$ ，则 $P(Y = at + b) = P(X = t)$ ，可得 Y 的分布列

X	$ax_1 + b$	$ax_2 + b$	$\dots$	$ax_n + b$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

计算数学期望 $E(Y) = E(aX + b) = (ax_1 + b)p_1 + (ax_2 + b)p_2 + \dots + (ax_n + b)p_n$ ，整理得

$$E(aX + b) = a(x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n) + b = aE(X) + b$$

线性性质推论 若 X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 均为离散型随机变量，则

$$E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$$

乘法定理 若两个离散型随机变量 X_1 、 X_2 相互独立，则

$$E(X_1 X_2) = E(X_1) \cdot E(X_2)$$

EXAMPLE 1 (2025·全国I卷) 有5个相同的球，分别标有数字1, 2, 3, 4, 5，从中有放回地随机取3次，每次取1个球；记 X 为这5个球中至少被取出1次的球的个数，则 X 的数学期望。

解析

抽3次球，每个球都有可能抽到且可重复，属于重复排列，总共有 $5^3 = 125$ 种情况，易得 X 的所有可取值为1, 2, 3，讨论：当 $X = 1$ 时，代表某一个球被重复抽到三次，只需抽其中一个球即可，则有 $C_5^1 = 5$ 种情况，所以

$$P(X = 1) = \frac{5}{125} = \frac{1}{25}$$

当 $X = 3$ 时，代表三次抽球号码均不同，只需按顺序排列三个不同号的球即可，则有 $A_5^3 = 60$ 种情况，所以

四. 常见离散型随机变量的分布

1. 伯努利试验 (Bernoulli Trials)

定义 对于只有两个可能结果的随机试验称为伯努利试验，并用 A 表示 **成功**， $\bar{A}$ 表示 **失败**，则

$$X = \begin{cases} 1, A \text{ 发生} \\ 0, \bar{A} \text{ 发生} \end{cases}$$

且 $P(A) = p$, $P(\bar{A}) = 1 - p$ ($0 < p < 1$)。

2. 两点分布 (Two-point Distribution)

定义 在单次伯努利试验中， X 服从参数为 p 的**两点分布**，记为 $X \sim B(1, p)$

两点分布的分布列 根据取值以及相应的概率，可得两点分布的分布列：

X	0	1
P	$1 - p$	p

期望与方差 根据两点分布的分布列可计算出两点分布的数学期望与方差：

① 数学期望： $E(X) = p$

这就好比“平均得分”，若投篮命中率是0.8，则投这一球从平均意义上讲，这一球就值0.8分。

② 方差： $D(X) = p(1 - p)$

代表“不确定性”，当 $p = 0.5$ （比如抛硬币）时，结果最难猜，所以波动最大；当 p 接近0或1时，结果几乎是注定的，所以波动很小。

3. 二项分布 (Binomial Distribution)

n 次独立重复试验 将一个伯努利试验 **独立地** 重复进行 n 次所组成的随机试验称为 **n 次独立重复试验**。

定义 在 n 次独立重复试验中，只关注试验成功的次数（事件 A 发生的次数），用 X 表示发生的次数，则

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

则称 X 服从参数为 n 与 p 的**二项分布**，记作 $X \sim B(n, p)$ ；

二项分布的分布列 根据取值以及相应的概率，可得二项分布的分布列：

X	0	1	...	n
P	$C_n^0 p^0 (1 - p)^n$	$C_n^1 p^1 (1 - p)^{n-1}$	...	$C_n^n p^n (1 - p)^0$

数学期望与方差 根据二项分布的分布列可计算出二项分布的数学期望与方差：

① 数学期望： $E(X) = np$

既然投一次平均能得 p 分，那投 n 次平均下来自然就是 np 分；比如命中率0.8，投10次，理论上平均能进8个

② 方差： $D(X) = np(1 - p)$

它是单次波动的 n 倍，次数越多，总的波动自然越大

推导 数学期望 $E(X) = \sum_{k=0}^n k C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$ ，从 $k = 1$ 起，利用吸收恒等式 $k C_n^k = n C_{n-1}^{k-1}$ 可得

$$E(X) = \sum_{k=1}^n n C_{n-1}^{k-1} p^k (1 - p)^{n-k} = np \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i p^i (1 - p)^{(n-1)-i} \quad (i = k - 1)$$

由二项式定理得 $(1 - p + p)^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i p^i (1 - p)^{(n-1)-i} = 1$ ，故 $E(X) = np$ 。

三.一元线性回归模型

1. 一元线性回归模型

一元线性回归模型 当两个变量 x, y 呈现 **大致线性关系** 时, 可以用直线近似表示:

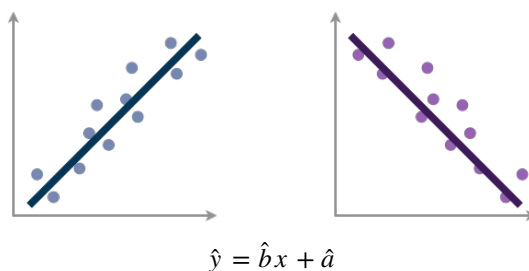
$$y = bx + a$$

在实际数据中, 由于存在误差, 引入回归模型:

$$y = bx + a + \varepsilon$$

其中, x 为自变量, y 为因变量, a 为截距, b 为斜率, ε 为随机误差 (不可控因素)

经验回归方程 用样本数据 (x_i, y_i) 得到:



这条直线叫 **经验回归直线**, 其中, $\hat{b}$ 为斜率, $\hat{a}$ 为截距.

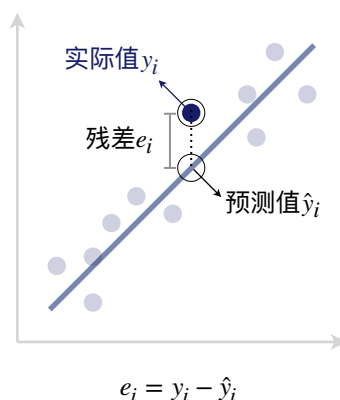
2. 模型参数的最小二乘估计

思想 选择一条直线, 使得:

$$\sum (y_i - \hat{y}_i)^2$$

达到最小, 即 **让每个样本点都尽可能贴近这条直线**, 这叫 **最小二乘法**

其中, $y_i - \hat{y}_i$ 为 **实际值 - 预测值**, 即 **残差** e_i



最小情况 下面我们思考一下什么时候 $\sum (y_i - \hat{y}_i)^2$ 取得最小, 我们先把预测值用线性回归方程, 用 x_i 表示 $\hat{y}_i$

$$\sum (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum (y_i - a - bx_i)^2$$

现在我们只需要 $\sum (y_i - a - bx_i)^2$ 取得最小, 我们把他看作以 a, b 为变量的函数 $F(a, b)$

$$F(a, b) = \sum (y_i - a - bx_i)^2$$

分别以 a, b 为自变量求导

$$\frac{d}{da} F(a, b) = -2 \sum (y_i - a - bx_i) = 0, \text{ 整理得 } \sum y_i = na + b \sum x_i, \text{ 即 } a = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$\frac{d}{db} F(a, b) = -2 \sum x_i (y_i - a - bx_i) = 0, \text{ 整理得 } \sum x_i y_i = a \sum x_i + b \sum x_i^2$$

将 $a = \bar{y} - b\bar{x}$ 代入 $\sum x_i y_i = a \sum x_i + b \sum x_i^2$ 得

$$\hat{b} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum x_i^2 - n \bar{x}^2}$$

此时, 每个样本点都能尽可能贴近这条直线, $\sum (y_i - \hat{y}_i)^2$ 达到最小;

CHAPTER 9

Sequence 数列

章节目标 CHAPTER OBJECTIVES

如果说函数研究的是连续世界的波动，那么数列则是对离散秩序的精准解构。在这一章，我们将超越碎片化的数字罗列，建立起“函数化”的全局视角。

我们将见证等差数列如何映射直线的平稳，等比数列如何复刻指数的爆发，并在“化归与转化”的艺术中，将复杂的递推关系拆解为最纯粹的数学模型。

学完本章内容，你需要：

1. **构建函数视角**：摆脱死记硬背，利用二次函数与指数函数的图像特性，直观锁定数列的单调性、周期性与最值项。
2. **深挖特殊性质**：透彻掌握等差与等比数列的特殊性质，实现 S_n 与 a_n 间的转换。
3. **掌握构造化归**：面对非线性递推，熟练运用待定系数、取对数、取倒数等手段，完成从“未知”向“已知模型”的降维打击。
4. **算法化求和技术**：建立 特征-武器 匹配库，针对不同通项结构，精准调用错位相减、裂项相消（五大变型）或并项求和。

第一节 数列的基本内容

一. 数列的概念

1. 数列

数列 (Sequence) 按照确定的 顺序排列 的一列数；数列中的每一个数叫做这个数列的项。按顺序第一个位置为第1项，用 a_1 表示，以此类推....，其中，第1项也叫做 首项 。

项数分类 若数列按照项数划分，则有两种分类：

有穷数列 一个数列的项数若为 **有限项**，则该数列称为有穷数列；

无穷数列 一个数列的项数若为 **无限项**，则该数列称为无穷数列。

单调性分类 若数列按照单调性分类，则有四种分类：

递增数列 每一项都 **大于** 它的前一项的数列；

递减数列 每一项都 **小于** 它的前一项的数列；

摆动数列 从第2项起，有些项 **大于** 它的前一项，有些项 **小于** 它的前一项的数列；

常数数列 各项 **相等** 的数列

2. 数列的通项公式

定义 数列从首项起，**每一项** 都与 **正整数** 对应，用 a_n 表示数列的第 n 项，称为数列的**通项**。

理解 用 $a_n = f(n)$ 表示第 n 项 a_n 与 n 之间的关系， $f(n)$ 是仅关于 n 的表达式；换句话说， $f(x)$ 是数列 $\{a_n\}$ 的一个 **生成函数**，并且根据通项公式能够得到数列的任意一项。

一个数列可能没有通项公式，也可能有多个通项公式

三. 数列的求和与求积

1. 数列的前n项和 S_n

数列 $\{a_n\}$ 从第1项起到第n项止的各项之和 称为 **数列 $\{a_n\}$ 的前n项和**, 记作 S_n , 即

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

也可用求和符号来表示, 即 $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$ (下标为求和的起始, 上标为求和的终止)

通项与求和的关系 $a_n = \begin{cases} S_1, n=1 \\ S_n - S_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$

EXAMPLE 设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前n项和, 且 $S_n = \frac{3}{2}(a_n - 1)$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式:

STEP 1 求首项 当 $n=1$ 时, $S_1 = a_1 = \frac{3}{2}(a_1 - 1)$, 所以 $a_1 = 3$.

STEP 2 找关系 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{3}{2}(a_n - a_{n-1})$, 所以 $a_n = 3a_{n-1}$, 故当 $n \geq 2$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 是以3为公比, $a_2 = 3a_1 = 9$ 为首项的等比数列, 故 $a_n = 3^n$.

STEP 3 验证首项 当 $n=1$ 时, $a_1 = 3^1$, 满足该表达式, 故 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3^n$.

注意 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 容易忽略 $n \geq 2$ 的条件, a_n 是从第二项开始的, 而不是第一项, 一定要验证首项;

若 $n=1$ 符合求出的 a_n , 则可直接写上 a_n 的表达式; 若 $n=1$ 不符合求出的 a_n , 那就必须分段, 即

$$a_n = \begin{cases} S_1, n=1 \\ S_n - S_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$$

EXAMPLE 1 设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前n项和, 且 $S_n = n^2 + n + 2$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解析

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = 2n$, 当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 4$ 不符合, 故 $a_n = \begin{cases} 4, n=1 \\ 2n, n \geq 2 \end{cases}$.

EXAMPLE 2 已知数列 $\{a_n\}$ 的前n项和为 S_n , 且 $a_n = \frac{1}{2}(\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}})(n \geq 2)$, $S_4 = 4$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解析

$$a_n = \frac{1}{2}(\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{S_n - S_{n-1}}{\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a_n}{\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}}$$

所以 $\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}} = \frac{1}{2}$, 又 $S_4 = 4$, 所以 $\sqrt{S_1} = \frac{1}{2}$, 数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为公差, $\frac{1}{2}$ 为首项的等差数列, 即 $S_n = \frac{n^2}{4}$

当 $n=1$ 时, $S_1 = a_1 = \frac{1}{4}$, 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{2n-1}{4}$, 当 $n=1$ 时, $a_1 = \frac{1}{4}$ 符合, 故 $a_n = \frac{2n-1}{4}$.

2. 数列的前n项积 T_n

定义 数列 $\{a_n\}$ 从第1项起到第n项止的各项之积 称为 **数列 $\{a_n\}$ 的前n项积**, 记作 T_n , 即

$$T_n = a_1 a_2 \cdots a_n$$

也可用求积符号 Π 来表示, 即 $T_n = \prod_{i=1}^n a_i$ (下标为求积的起始, 上标为求积的终止)

通项与求积的关系 $a_n = \begin{cases} T_1, n=1 \\ T_n / T_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$

举例 已知数列 $\{a_n\}$ 的前n项积 $T_n = \frac{2^n}{n+1}$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = \frac{T_n}{T_{n-1}} = \frac{2^n}{n+1} \cdot \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{2n}{n+1}$, 当 $n=1$ 时, $a_1 = T_1 = 1$ 符合, 故 $a_n = \frac{2n}{n+1}$.

注意 与求和同理, 记得验证首项, 不符合要分段.

三.对数型

1. 标准模型

若正项数列 $\{a_n\}$ 的递推公式为 $a_{n+1} = A a_n^r$ ($A > 0, r \neq 1$), 则其通项公式为

$$a_n = e^{(\ln a_1 + \frac{\ln A}{r-1})r^{n-1} - \frac{\ln A}{r-1}}$$

推导 递推公式两侧取对数得 $\ln a_{n+1} = r \ln a_n + \ln A$, 根据 [线性型的常数情况](#) 可得

$$\ln a_n + \frac{\ln A}{r-1} = (\ln a_1 + \frac{\ln A}{r-1})r^{n-1}, \text{ 即 } a_n = e^{(\ln a_1 + \frac{\ln A}{r-1})r^{n-1} - \frac{\ln A}{r-1}}$$

这里使用了自然底数 e , 也可以选择其他底数, 无论如何, 用对数运算将其化简即可; 下面有其的扩展形式:

例如 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n^2$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

STEP 1 取对变形 $\ln a_{n+1} = 2 \ln a_n + \ln 2$.

STEP 2 待定常数 令 $\ln a_{n+1} + x = 2(\ln a_n + x)$, 化简得 $\ln a_{n+1} = 2 \ln a_n + x$, 对比得 $x = \ln 2$.

STEP 2 求出通项 可得 $\ln a_{n+1} + \ln 2 = 2(\ln a_n + \ln 2)$, 所以 $\ln 2a_n = \ln 2 \cdot 2^n$, 故 $a_n = 2^{2^{n-1}-1}$.

2. 拓展模型: 对数化的两种变式

扩展1 正项数列 $\{a_n\}$ 的递推公式为 $a_{n+1} = a_n^{f(n)}$ ($f(n) \neq 1$):

递推公式两侧取对数得 $\ln a_{n+1} = f(n) \ln a_n \Rightarrow \frac{\ln a_{n+1}}{\ln a_n} = f(n)$, 根据 [累乘型](#) 可求出通项

扩展2 正项数列 $\{a_n\}$ 的递推公式为 $a_{n+1} = g(n) \cdot a_n^r$ ($g(n) > 0, r \neq 1$):

递推公式两侧取对数得 $\ln a_{n+1} = r \ln a_n + \ln g(n)$, 根据 [线性型](#) 可求出通项

EXAMPLE 1 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 4, a_{n+1} = a_n^{2^n}$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解析

取对数得 $\ln a_{n+1} = 2^n \ln a_n$, 即 $\frac{\ln a_{n+1}}{\ln a_n} = 2^n$, 累乘得 $\ln a_n = \ln a_1 \cdot 2^{1+2+\cdots+n-1} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$, 故 $a_n = 4^{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}$.

EXAMPLE 2 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = e^{-1}, a_{n+1} = e^{2n} \cdot a_n^3$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解析

取对 $\ln a_{n+1} = 3 \ln a_n + 2n$, 令 $\ln a_{n+1} + x(n+1) + y = 3(\ln a_n + xn + y)$, 化简 $\ln a_{n+1} = 3 \ln a_n + 2xn + 2y - x$

对比得 $x = 1, y = \frac{1}{2}$, 则 $\ln a_n + n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 3^{n-1}$, 故 $a_n = e^{\frac{3^{n-1}-1}{2}-n}$.

四.倒数型

1. 标准模型

若数列 $\{a_n\}$ 的递推公式为 $a_{n+1} = \frac{A a_n}{B a_n + C}$ ($A, B, C \neq 0$), 则其通项公式为

$$a_n = \begin{cases} \left(\frac{C-A}{(\frac{C-A}{a_1} + B) \cdot (\frac{C}{A})^{n-1} - B} \right), & A \neq C \\ \frac{A}{\frac{A}{a_1} + B(n-1)}, & A = C \end{cases}$$

推- (取倒数构造法) 递推公式对两边取倒数并变形得

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{B a_n + C}{A a_n} = \frac{C}{A} \cdot \frac{1}{a_n} + \frac{B}{A}$$

四. 简单裂项相消法

1. 裂项相消法

将数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n 分裂成相邻项之差, 在求和时利用正负项相互抵消, 核心为:

何将 $\{a_n\}$ 分裂成一个新数列相邻项之差, 常见为 $a_n = c_n - c_{n+1}$.

原始形式 若数列 $\{a_n\}$ 的递推公式为 $a_n = c_n - c_{n+1}$, 则其前 n 项和为 $S_n = c_1 - c_{n+1}$

推导 依次递归通项得 $a_1 = c_1 - c_2$, $a_2 = c_2 - c_3$, $\dots$, $a_{n-1} = c_{n-1} - c_n$, $a_n = c_n - c_{n+1}$, 则

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n = c_1 - c_2 + c_2 - c_3 + c_3 - c_4 + \dots + c_{n-1} - c_n + c_n - c_{n+1} = c_1 - c_{n+1}$$

这里求和从 $a_1 = c_1 - c_2$ 开始的, 若从 a_2 等别的项开始, 则需要分开计算

推广形式 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = c_n - c_{n+k}$ ($k \in \mathbb{N}^*, k \leq n$), 则其前 n 项和为

$$S_n = c_1 + c_2 + \dots + c_k - (c_{n+1} + c_{n+2} + \dots + c_{n+k})$$

推导 依次递归通项 $a_1 = c_1 - c_{k+1}$, $a_2 = c_2 - c_{k+2}$, $\dots$, $a_{n-1} = c_{n-1} - c_{n+k-1}$, $a_n = c_n - c_{n+k}$, 则

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = c_1 - c_{k+1} + c_2 - c_{k+2} + \dots + c_{n-1} - c_{n+k-1} + c_n - c_{n+k}$$

化简得 $S_n = c_1 + c_2 + \dots + c_k - (c_{n+1} + c_{n+2} + \dots + c_{n+k})$.

当 $k=1$ 时, 即为原始形式, 且 k 在绝大部分情况均为1

2. 等差分式型裂项

若 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{A}{b_n b_{n+1}}$, 前 n 项和为 S_n , 其中 $\{b_n\}$ 是以 d 为公差的等差数列, 则

$$a_n = \frac{A}{d} \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right), \quad S_n = \frac{A}{d} \left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_{n+1}} \right)$$

推导 因为 $\{b_n\}$ 是以 d 为公差的等差数列, 所以 $b_{n+1} - b_n = d$, 代入通项公式得

$$a_n = \frac{A}{b_n b_{n+1}} = \frac{A}{d} \cdot \frac{d}{b_n b_{n+1}} = \frac{A}{d} \cdot \frac{b_{n+1} - b_n}{b_n b_{n+1}} = \frac{A}{d} \cdot \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right)$$

求和得 $S_n = \frac{A}{d} \left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_2} - \frac{1}{b_3} + \dots + \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right)$, 整理得 $S_n = \frac{A}{d} \left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_{n+1}} \right)$.

只要分母是等差数列相邻项得乘积, 分子是常数, 就可以通过乘除公差进行裂项

EXAMPLE 1 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$, 求 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

STEP 1 裂项拆分 变形得 $a_n = \frac{(n+1) - n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

STEP 2 求和 可得 $S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

EXAMPLE 2 (2015·江苏) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, 且 $a_{n+1} - a_n = n + 1$, 求数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 的前10项和.

解析

易得通项 $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$, 则 $a_n = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$, 故 $\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_{10}} = \frac{22}{11}$.

EXAMPLE 3 (2022·甲卷理) 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_1 = 1$, $\{\frac{S_n}{a_n}\}$ 是公差为 $\frac{1}{3}$ 的等差数列.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 证明: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < 2$.

CHAPTER 10

Conics 解析几何

章节目标 CHAPTER OBJECTIVES

在高中数学中，解析几何的魅力在于：用“算”的方法解决“看”的问题。一条直线和一个圆的位置关系，肉眼可以分辨；但一条直线与双曲线是否相切，一个动点到两个定点的距离之和是否为常数，这些仅凭直觉难以判断的问题，正是解析几何发挥作用的地方。本章的核心任务，是建立从“几何直觉”到“代数精确”的思维桥梁。解析几何的研究呈现出两条并行的技术路线：

静态刻画——方程与曲线、动态关联——位置与运算

在静态刻画层面，我们需要掌握三类基本对象：

1. **直线**：倾斜角、斜率、方向向量、法向量——同一个对象的多重代数身份
2. **圆**：标准方程、一般方程、参数方程、直径圆方程——四种形式服务于不同的问题情境
3. **圆锥曲线**：椭圆（和）、双曲线（差）、抛物线（比）——第一定义揭示了轨迹的几何本源，第二定义实现了三种曲线的统一

在动态关联层面，我们重点关注：

1. **位置关系的量化**：点到直线的距离公式（不仅是计算，更是判断上下方的工具）、圆心到直线的距离与半径的比较、两圆心距与半径和差的比较——这些“距离法”构成了判断位置关系的统一框架
2. **焦点结构的深度挖掘**：焦半径公式（坐标形式与角度形式）、焦点三角形的面积公式、焦半径倒数和为定值——这些结论不是记忆负担，而是通往高效解题的“捷径”
3. **运算的优化策略**：点乘双根法（将韦达定理推向极致）、平移齐次化（将斜率问题转化为二次方程根与系数的关系）、解点法——这些技巧的本质，是让代数运算服务于几何直觉，而非相反

通过本章的学习，你将获得的不仅是椭圆、双曲线、抛物线的标准方程和性质，更是一种思维方式：遇到几何问题，先建立坐标系；有了坐标系，几何就有了代数表达；有了代数表达，运算就能揭示几何本质。这就是解析几何的核心素养。

第一节 直线

一. 定线与直线方程

1. 定线

定线分析 在平面内，一条直线由两个要素唯一确定



不重合的两个点 或 一个点与一个方向 可以确定唯一一条直线

2. 方向度量

斜率 (Slope) 直线 l 与 x 轴 正方向 所成角 α 称为倾斜角，倾斜角的正切值称为直线的斜率。

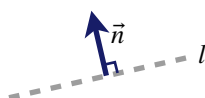
$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \tan \alpha$$

范围 倾斜角 α 的取值范围为 $0 \leq \alpha < \pi$

方向向量 (Direction Vector) 与直线 平行 的非零向量



法向量 (Normal Vector) 与直线 垂直 的非零向量.



3. 直线的方程

方程名称	标准表达式	关键参数含义	适用范围与备注
点斜率式	$y = k(x - x_0) + y_0$ 或 $x = m(y - y_0) + x_0$	(x_0, y_0) 定点; k 斜率, m 倒数斜率	直线过定点, $mk = 1$
斜率截距式	$y = kx + b$ 或 $x = my + n$	b 为 y 轴截距, n 为 x 轴截距	常用, b 是纵截距, n 是横截距
两点式	$y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1) + y_1$ 或 $y_1x_2 - y_2x_1 = x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1)$	(x_1, y_1) 与 (x_2, y_2) 为两不重合点	前者为分式, 后者为整式
截距式	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 或 $mx + ny = 1$	a, b 为截距; m, n 为截距倒数	a, b 不为 0 $k = -b/a = -m/n$
横竖式	$Ax + B = 0$ 或 $Cy + D = 0$	A, C 不为 0	前者为竖直线, 后者为水平线
点向式	$\frac{A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ 或 $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$	$\vec{l} = (m, n)$ 方向向量; $\vec{n} = (A, B)$ 法向量	垂直: $\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0$ 平行: $\overrightarrow{P_0P} = \lambda \vec{l}$ ($\lambda \neq 0$)
一般式	$Ax + By + C = 0$	A, B 不同时为 0	统一形式; $k = -A/B$
参数式	$x = x_0 + t \cos \theta, y = y_0 + t \sin \theta$ 或 $x = x_0 + \lambda, y = y_0 + \lambda k$ 或 $x = x_0 + \lambda m, y = y_0 + \lambda n$	θ 倾斜角, k 斜率; $\vec{l} = (m, n)$ 方向向量	t, λ 为参数; 在《二轮复习》详细讲解

EXAMPLE 1 已知三角形的三个顶点 $A(-5, 0)$, $B(3, -3)$, $C(0, 2)$, 求:

- (1) AC 边所在直线的方程;
- (2) BC 边上中线所在直线的方程.

解析

(1) 利用截距式可得 $AC: -\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1$, 化简得 $2x - 5y + 10 = 0$.

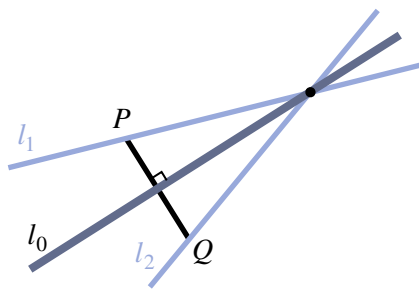
(2) 易得 BC 中点为 $D(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$, 利用两点式可得 $AD: x + 13y + 5 = 0$.

EXAMPLE 2 (2004·II 卷) 已知平面上直线 l 的方向向量 $\vec{e} = (-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$, 点 $O(0, 0)$ 和 $A(1, -2)$ 在 l 上的射影分别是

O_1 和 A_1 , 则 $\overrightarrow{O_1A_1} = \lambda \vec{e}$, 求 λ 的值.

解析

$$m[x - 2\frac{A}{A^2+B^2}(Ax+By+C)] + n[y - 2\frac{B}{A^2+B^2}(Ax+By+C)] + p = 0$$



优化写法 记对称轴 l_0 对应的二元表达式 $f(x, y) = Ax + By + C$, 则有

$$P[x - \frac{2A}{A^2+B^2}f(x, y), y - \frac{2B}{A^2+B^2}f(x, y)]$$

再记 l_1 的二元表达式为 $F(x, y)$, 将点 P 代入 l_1 可得

$$F[x - \frac{2A}{A^2+B^2}f(x, y), y - \frac{2B}{A^2+B^2}f(x, y)] = 0$$

此时计算出的方程即为对称直线 l_2 , 此时将方程展开化简变形可得

$$\frac{mx + ny + p}{Ax + By + C} = \frac{2mA + 2nB}{A^2 + B^2}$$

依旧是化简即为对称直线 l_2 。

注意 在考题中只需要确定要对称的直线 $l_1: mx + ny + p = 0$, l_1 以及对称轴 $l_0: Ax + By + C = 0$, 代入简化的

方程 $\frac{mx + ny + p}{Ax + By + C} = \frac{2mA + 2nB}{A^2 + B^2}$, 再化简即可。

EXAMPLE 1 已知直线 $l_1: 2x - y + 3 = 0$ 与直线 l_2 关于直线 $y = -x$ 对称, 求直线 l_2 的方程。

方案一

设点 $P(x_0, y_0)$ 是 l_1 上一点, 其对称点为 $Q(x, y)$, 可得 $x_0 = x - \frac{2}{2}(x + y) = -y$, $y_0 = y - \frac{2}{2}(x + y) = -x$, 因为 P 在 l_1 上, 代入 l_1 得 $2(-y) - (-x) + 3 = 0$, 化简得 $l_2: x - 2y + 3 = 0$ 。

方案二

利用公式 $\frac{2x - y + 3}{x + y} = \frac{4 - 2}{2}$, 化简得 $l_2: x - 2y + 3 = 0$ 。

EXAMPLE 2 (2022·II卷) 设点 $A(-2, 3)$, $B(0, a)$, 若直线 AB 关于 $y = a$ 对称的直线与圆 $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 1$ 有公共点, 求 a 的取值范围。

解析

易得 $k_{AB} = \frac{a-3}{2}$, 则对称直线斜率为 $\frac{3-a}{2}$, 可得对称直线方程为 $y = \frac{3-a}{2}x + a$, 利用 $d < r$ 可得

$$a \in [\frac{1}{3}, \frac{3}{2}]$$

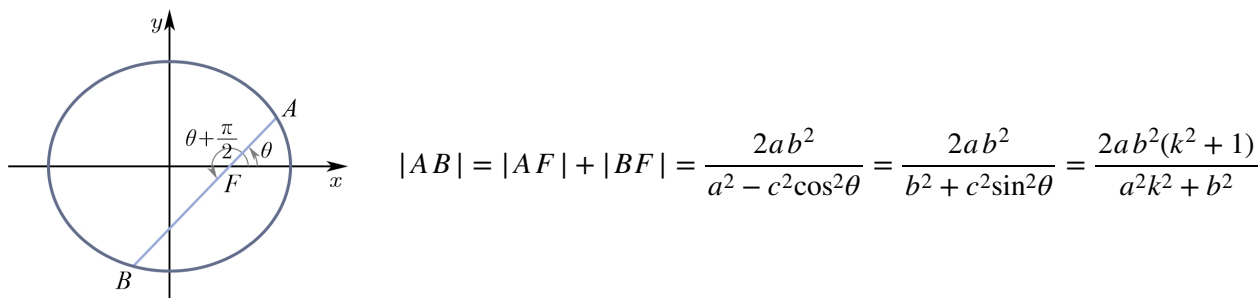
EXAMPLE 3 (2015·山东) 一条光线从点 $(-2, -3)$ 射出, 经 y 轴反射后与圆 $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$ 相切, 求反射光线所在直线的斜率。

解析

易得反射光线过点 $(2, -3)$, 则反射光线为 $y = k(x - 2) - 3$, 利用 $d = r$, 则 $12k^2 + 25k + 12 = 0$, 故

$$k = -\frac{3}{4} \text{ 或 } -\frac{4}{3}$$

椭圆的角度焦点弦 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的右焦点 F 弦为 AB , 设 θ 为 AF 对应的有向角, k 为 AB 所在直线的斜率, 则



$$|AB| = |AF| + |BF| = \frac{2ab^2}{a^2 - c^2 \cos^2 \theta} = \frac{2ab^2}{b^2 + c^2 \sin^2 \theta} = \frac{2ab^2(k^2 + 1)}{a^2 k^2 + b^2}$$

推导 AF 的有向角为 θ , 则 BF 的有向角为 $\theta + \pi$, 由焦半径的角度公式得

$$|AF| = \frac{b^2}{a + c \cos \theta}, \quad |BF| = \frac{b^2}{a - c \cos \theta}$$

$$\text{所以 } |AB| = |AF| + |BF| = \frac{b^2(a + c \cos \theta + a - c \cos \theta)}{(a + c \cos \theta)(a - c \cos \theta)} = \frac{2ab^2}{a^2 - c^2 \cos^2 \theta} = \frac{2ab^2}{b^2 + c^2 \sin^2 \theta}$$

EXAMPLE 1 (2012·安徽卷) 点 F_1 和 F_2 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左和右焦点, A 是椭圆 C 的上顶点, B 是直线 AF_2 与椭圆 C 的另一个交点, $\angle F_1 A F_2 = 60^\circ$.

- (1) 求椭圆 C 的离心率;
- (2) 已知 $\Delta A F_1 B$ 面积为 $40\sqrt{3}$, 求 a 和 b 的值.

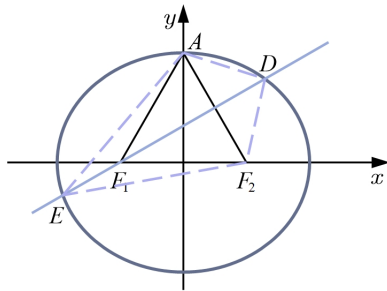
解析

$$(1) \text{ 由题 } e = \frac{c}{a} = \sin \frac{\angle F_1 A F_2}{2} = \frac{1}{2};$$

(2) 由 (1) 得 $\angle F_1 A F_2 = 60^\circ$ 为等边三角形, 且边长为 a , 所以直线 AB 的倾斜角为 120° , 则

$$|AB| = \frac{2a(a^2 - \frac{a^2}{4})}{a^2 - \frac{a^2}{4} \cdot \cos^2 120^\circ} = \frac{8}{5}a, \text{ 所以 } \frac{1}{2}|AF_1||AB|\sin 60^\circ = 40\sqrt{3}, \text{ 代入解得 } a = 10, b = 5\sqrt{3}.$$

EXAMPLE 2 (2022·I卷) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的上顶点为 A , 两个焦点为 F_1 和 F_2 , 离心率为 $\frac{1}{2}$, 过 F_1 且垂直于 AF_2 的直线与交于 D 和 E 两点, $|DE| = 6$, 求 ΔADE 的周长.



解析

因为 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, 所以 $\Delta A F_1 F_2$ 为等边三角形, 且 DE 为 AF_2 的中垂线, 故

化简方案 设出直线方程 $y = kx + m$, 代入目标方程 分离常数

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} + \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} = 2k + [kx_0 + m - y_0](\frac{1}{x_1 - x_0} + \frac{1}{x_2 - x_0})$$

令 $t = x - x_0$, 则 $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} + \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} = 2k + [kx_0 + m - y_0](\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2})$

倒数和构造 (点乘双根) 若可得 $f(x) = Ax^2 + Bx + C = A(x - x_1)(x - x_2)$, 对 x 求导得

$$f'(x) = 2Ax + B = -A(x_1 - x + x_2 - x)$$

分别令 $x = x_0$, 可得 $f(x_0) = A(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)$, $f'(x_0) = -A(x_1 - x_0 + x_2 - x_0)$, 作比得

$$-\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = \frac{x_1 - x_0 + x_2 - x_0}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)} = \frac{1}{x_1 - x_0} + \frac{1}{x_2 - x_0}$$

这里选择直线的依据是看分母, 最终都要分离常数, 分母不能动, 所以依靠分母来设直线;

EXAMPLE 1 (2017·I卷) 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), 四点 $P_1(1, 1)$, $P_2(0, 1)$, $P_3(-1, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $P_4(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$

中恰有三点在椭圆 C 上.

(1) 求 C 的方程;

(2) 设直线 l 不经过点 P_2 且与 C 相交于 A 和 B 两点, 若直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率之和为 -1 , 证明: l 过定点.

解析

(1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$;

(2) 设 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$, $l: y = kx + m$, 则

$$\frac{y_1 - 1}{x_1} + \frac{y_2 - 1}{x_2} = 2k + (m - 1)(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}) = -1$$

联立得 $f(x) = \frac{x^2}{4} + (kx + m)^2 - 1 = (\frac{1}{4} + k^2)(x_1 - x)(x_2 - x)$, 则

$$f(0) = m^2 - 1 = (\frac{1}{4} + k^2)x_1x_2$$

求导得 $f'(x) = \frac{x}{2} + 2k(kx + m) = -(\frac{1}{4} + k^2)(x_1 + x_2 - 2x)$, 则

$$f'(0) = 2mk = -(\frac{1}{4} + k^2)(x_1 + x_2)$$

所以 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{f'(0)}{f(0)} = -\frac{2mk}{m^2 - 1}$, 则 $\frac{y_1 - 1}{x_1} + \frac{y_2 - 1}{x_2} = 2k + (m - 1)\frac{-2mk}{m^2 - 1} = 2k - \frac{2mk}{m + 1} = -1$, 化简可得

$m = -2k - 1$, 所以 $AB: y = k(x - 2) - 1$, 故直线 AB 过定点 $(2, -1)$.

后续会省去 $(x_1 - x)(x_2 - x)$ 以及 $(x_1 + x_2 - 2x)$ 的部分, 但是答卷书写时不能省去.

EXAMPLE 2 (2023·乙卷) 已知曲线 C 的方程为 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), 离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$, 曲线过点 $A(-2, 0)$.

(1) 求曲线 C 的方程;

(2) 过点 $(-2, 3)$ 的直线交曲线 C 于 P 和 Q 两点, 直线 AP 和 AQ 与 y 轴交于 M 和 N 两点, 证明: 线段 MN 的中点是定点.

解析

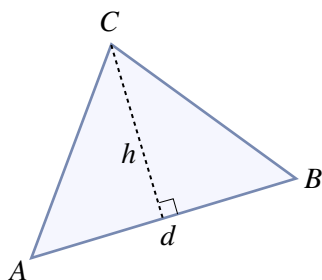
(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$;

(2) 设 $P(x_1, y_1)$ 和 $Q(x_2, y_2)$, $PQ: y = k(x + 2) + 3$, 易得

$$M(0, \frac{2y_1}{x_1 + 2}), N(0, \frac{2y_2}{x_2 + 2})$$

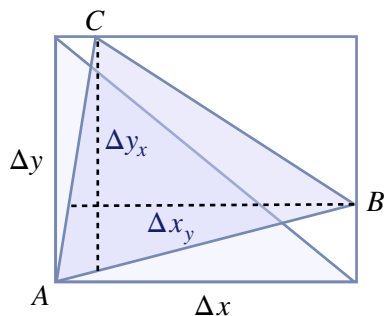
5. 面积计算

基础面积公式



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}d \cdot h$$

铅锤面积公式



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\Delta x \cdot \Delta y_x = \frac{1}{2}\Delta y \cdot \Delta x_y$$

弦底面积公式 已知 AB 在圆锥曲线 Γ 上, 则以 $AB: y = kx + m$ 为底, 点 $P(x_0, y_0)$ 为顶点的三角形面积为

$$S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2}|AB| \cdot d_{P-AB} = \frac{1}{2}|kx_0 + m - y_0| \cdot \frac{\sqrt{\Delta}}{|A|}$$

推导 由前面内容可得长度 $|AB| = \sqrt{1+k^2} \frac{\sqrt{\Delta}}{|A|}$, 又 $d_{P-AB} = \frac{|kx_0 + m - y_0|}{\sqrt{1+k^2}}$, 所以

$$S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2}|AB| \cdot d = \frac{1}{2}|kx_0 + m - y_0| \cdot \frac{\sqrt{\Delta}}{|A|}$$

EXAMPLE 1 (2012·北京) 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的右顶点为 A , 直线 $y = k(x-1)$ 与椭圆 C 交于不同的两点 M 、 N , 当 $\triangle AMN$ 的面积为 $\frac{\sqrt{10}}{3}$ 时, 求 k 的值.

解析

直线 MN 过定点 $(1,0)$, 此时可利用定点与 A , 连线将三角形分成上下两部分, 两个纵坐标的绝对值即为高, 形成割补面积, 即 $S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot |y_M - y_N|$.

设 $M(x_1, y_1)$ 和 $N(x_2, y_2)$, 易得 $S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2}|y_1 - y_2|$, 重设 $MN: x = my + 1$ 与椭圆联立得

$$(2+m^2)y^2 + 2my - 3 = 0$$

可得 $\Delta = 16m^2 + 24$, 所以 $S = \frac{2\sqrt{m^2 + \frac{3}{2}}}{m^2 + 2} = \frac{\sqrt{10}}{3}$, 解得 $k = \frac{1}{m} = \pm 1$.

EXAMPLE 2 (2025·II卷) 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 长轴长为4.

(1) 求 C 的方程;

(2) 过点 $(0, -2)$ 的直线 l 与 C 交于 A 与 B , O 为坐标原点, 若 $S_{\triangle OAB} = \sqrt{2}$, 求 $|AB|$.

解析

$$\frac{1+2y_0n}{b^2}k^2 + 2(\frac{x_0n}{a^2} + \frac{y_0m}{b^2})k + \frac{1+2x_0m}{a^2} = 0$$

双曲线情况的构造过程与椭圆情况完全一致

抛物线情况 已知点 $P(x_0, y_0)$ 在抛物线 $\Gamma: y^2 = 2px$ 上, 点 A 和 B 为抛物线 Γ 上两动点.

将图像按 $\overrightarrow{PO} = (-x_0, -y_0)$ 平移, 可得 $\Gamma': (y+y_0)^2 = 2p(x+x_0)$, 展开得

$$y^2 + 2y_0y + y_0^2 = 2px + 2px_0$$

因为 $P(x_0, y_0) \in \Gamma$, 所以 $y_0^2 = 2px_0$, 化简可得 $y^2 + 2y_0y - 2px = 0$, 设 $A'B': mx + ny = 1$, 构造

$y^2 + (2y_0y - 2px)(mx + ny) = 0$, 化简整理得

$$(1+2y_0n)k^2 + (2y_0m - 2pn)k - 2pm = 0$$

EXAMPLE 1 (2015·陕西) 椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 经过点 $A(0, -1)$, 且离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 经过点 $(1,1)$, 且斜率为 k 的直线与椭圆 E 交于不同的两点 P, Q (均异于点 A), 证明: 直线 AP 与 AQ 的斜率之和为2.

解析

(1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$;

(2) 按 $\overrightarrow{AO} = (0,1)$ 进行平移得 $E': \frac{x^2}{2} + y^2 - 2y = 0$, 设 $P'Q': mx + ny = 1$ 过 $(1,2)$, 所以 $m + 2n = 1$, 构造

$$\frac{x^2}{2} + y^2 - 2y(mx + ny) = 0, \text{ 化简得}$$

$$(1-2n)k^2 - 2mk + \frac{1}{2} = 0$$

$$\text{由韦达定理 } k_{AP} + k_{AQ} = \frac{2m}{1-2n} = \frac{2(1-2n)}{1-2n} = 2.$$

直线原本过的定点也要平移.

EXAMPLE 2 (2017·I卷) 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), 四点 $P_1(1,1), P_2(0,1), P_3(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}), P_4(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$

中恰有三点在椭圆 C 上.

(1) 求 C 的方程;

(2) 设直线 l 不经过点 P_2 且与 C 相交于 A 和 B 两点, 若直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率之和为 -1 , 证明: l 过定点.

解析

(1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$;

(2) 按 $\overrightarrow{P_2O} = (0, -1)$ 进行平移得 $C': \frac{x^2}{4} + y^2 + 2y = 0$, 设 $l': mx + ny = 1$, 构造 $\frac{x^2}{4} + y^2 + 2y(mx + ny) = 0$,

化简得

$$K(k) = (1+2n)k^2 + 2mk + \frac{1}{4} = 0$$

$$\text{由韦达定理 } k_{P_2A} + k_{P_2B} = -\frac{2m}{1+2n} = -1, \text{ 化简得 } 2m - 2n = 1, \text{ 对比得 } l \text{ 过定点 } (2, -2), \text{ 故 } l \text{ 过定点 } (2, -1).$$