

TutorCat二轮复习

精心打造， 专为压轴突破。

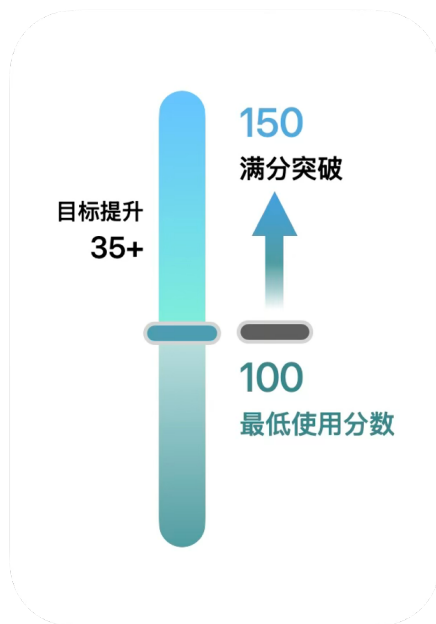
针对 2027 新高考压轴题，覆盖导数、圆锥、概率、统计、数列、排列组合、立体几何 7 大板块，汇集导学猫教研精华，均在此书呈现。



湖北省武汉市导学猫教育咨询有限公司 出品
中国科学文化音像出版社 出版



2027全新版本。新增T19信息题专攻章节；导数新增动态分析简化思路&动力源判定参数边界；深层融合概率与计数，构建更具普适性的解题体系；数列新增流动图，为不动点提供更直观理解；圆锥部分优化了定点调整法与的核心原理及其使用。



建议使用分数。为基础已达100分（想进一步提升导数、圆锥、概率、数列等压轴内容）的同学量身打造。



全书配套答疑。购书即享全年主编亲授答疑，扫清学习盲点，破局满分。（扫描书背面二维码开通）

选择适合你的。



选项建议	选择标准
选择 一轮	基础知识未完全掌握，中档题无法拿满分；
选择 二轮	小题&大题压轴不会做、无完善的分析体系，或以前学过一些“题型”与“套路”但面对多样的考题发现仍会出现纰漏；
选择 一轮+二轮套装	基础部分曾经很擅长，但随着时间推移略有遗忘；同时想提高压轴难度题目解题水平，冲击更高分数。

PART 1 立体几何	11
CHAPTER 1	12
空间角与射影	12
一. 投影与面积	12
1. 射影面积定理	12
2. 射影面积定理的向量推广	12
二. 三正弦定理、最大角问题、三余弦定理	13
1. 最大角定理	13
2. 三正弦定理	13
3. 三余弦定理	14
三. 空间余弦定理	15
CHAPTER 2	17
几何法：静态构型与动态分析	17
一. 静态分析	17
1. 二面角	17
2. 异面直线距离	17
3. 空间体顶点支撑	18
二. 动态分析	20
1. 单参数变换	20
2. 多参数变换	23
3. 动态射影与翻折问题	23
CHAPTER 3	25
球的几何学	25
一. 外接球	25
1. 球的截面圆	25
2. 双平行截面圆	26
3. 外接球的相交截面	27
4. 特殊立体图形外接球的几何构型	29
二. 内切球	31
1. 内切球的定义	31
2. 内切球半径公式	31
3. 正棱锥的内切球几何构型	32
4. 几何体中球体填充问题	34
三. 棱切球	35
PART 2 数列	38
CHAPTER 1	39
数列的奇偶项分析	39
一. 奇偶项定义	39
1. 奇偶子列与奇偶项	39
2. 奇偶项分段	39
3. 含 $(-1)^n$ 的 n 次方讨论	40
二. 隔项等差与隔项等比	41
1. 隔项等差	41
2. 隔项等差的衍生形式	42
3. 隔项等比	43

4. 隔项等比的衍生形式	44
三. 奇偶项求和	46
1. 分类求和	46
2. 并项求和规律	47
3. 奇偶裂项求和	50
CHAPTER 2	52
数列极限与不动点	52
1. 收敛数列与发散数列	52
2. 收敛数列的性质	52
3. 单调有界定理	53
4. 数列极限的运算	53
二. 数列的不动点	54
1. 递推数列	54
2. 数列的迭代过程	54
3. 蛛网图——几何化视角下的数列迭代	54
4. 数列不动点的定义	55
三. 数列不动点的二重性质	55
1. 控制域	55
2. 稳定性（吸引/排斥）	55
3. 形态（正常/螺旋）	56
4. 三种分界情况	57
四. 数列的不动点判定单调性与极限	58
1. 吸引不动点的情况	58
2. 排斥不动点的情况	59
3. 流动图——动态全景图	59
4. 多个不动点的动力传递	63
5. 不存在实数不动点	67
五. 一阶递推数列利用不动点求通项公式	68
1. 不动点分解定理	69
2. 不动点法求解通项的原理	69
3. 一阶线性递推型	69
4. 一阶分式线性递推型	70
5. 一阶二次分式递推型	73
6. 一阶特殊二次递推型	74
六. 借助不动点的放缩思路	75
1. 一阶收敛定理（等比收敛速度）	75
2. 收敛速度*	75
3. 正常型不动点的分式放缩	76
4. 借助不动点放缩的应用	80
CHAPTER 3	86
数列求和的特殊方法	86
一. 母函数与求和法	86
1. 母函数与幂级数	86
2. 母函数的在数列求和应用	87
3. 泰勒级数的推导	90
二. Abel变换	92
1. Abel恒等式	92

2. Abel变换的几何释义	92
3. Abel变换的应用	93
三. 裂项相消法进阶	95
1. 裂项相消的核心原理	95
2. 等差等比混合分式型	95
3. 对数型	95
4. 整式裂差型	96
5. 三角裂差型	97
CHAPTER 4	100
数列的放缩	100
一. 数列放缩的基本观点	100
1. 什么是数列放缩?	100
2. 数列放缩的核心步骤	100
3. 通项放缩与求和放缩	101
4. 通项放缩——数列的单调性与有界性的使用	101
5. 求和放缩——强行构造通项作比较	103
6. 特殊定理背景	104
二. 数列放缩的常用手段	105
1. 数列放缩手段的证明方法	105
2. 生成不等式	107
3. 留项改良精度	112
4. 等比最小界放缩	113
5. 裂项放缩	116
CHAPTER 5	119
差分方程及其解法*	119
一. 差分与差分方程的定义	119
1. 数列差分的定义	119
2. 数列差分的运算性质	119
3. 差分与求和的关系	120
4. 差分方程的定义	120
5. 初始条件/初值	121
6. 解的概念	122
二. 一阶差分方程的解法	123
1. 一阶常系数线性差分方程的解法	123
2. 一阶变系数线性差分方程的解法	124
三. k阶常系数线性差分方程的解法	125
1. 特征方程与特征根的引入	125
2. 叠加原理	126
3. 齐次型通解	126
4. 寻常常系数线性齐次差分的讨论	128
5. 非齐型的特解法	129
6. 非齐型的差分升阶法	131
四. 差分求和法	134
PART 3 概率统计	136
CHAPTER 1	137
计数与逻辑推理	137

一. 基础计数	137
1. 圆桌排列	137
2. 错排 + 固定点组合问题	137
二. 存在性与分布	138
1. 容斥原理	138
2. 容斥原理与错排问题	138
3. 鸽巢原理	139
3. 反射法与卡特兰数	139
4. 随机投票问题与伯特兰投票问题	140
5. Ferrer图与整数拆分共轭性	141
三. 生成函数	142
1. 直观理解-编码	142
2. 生成函数的两类形态	144
CHAPTER 2	146
动态规划	146
一. 动态规划的定义	146
二. 马尔科夫链的动态规划	148
1. 马尔可夫链的基本概念	148
2. 马尔可夫链的递推模型	148
三. 一维对称随机游走模型的动态规划	149
四. 非对称随机游走的动态规划	150
五. 完全错排问题的动态规划	152
六. 斯特林数的动态规划	153
七. 整数拆分的动态规划	154
CHAPTER 3	156
概率与期望	156
一. 概率与期望的统一性	156
1. 期望的本质：概率的加权平均	156
2. 期望与概率的代数关系：指示函数	156
3. 大数定律	156
二. 期望线性	157
三. 对称性原理与期望线性	157
四. 指示变量法与线性期望的结合：求种类数期望	158
1. 指示变量法	158
2. 结合线性期望	159
PART 4 圆锥曲线	162
CHAPTER 1	163
圆锥曲线的光学性质	163
一. 基本光学性质	163
1. 椭圆的基本光学性质	163
2. 双曲线的基本光学性质	164
3. 抛物线的基本光学性质	165
二. 焦点的切线射影性质	165
1. 椭圆与双曲线的切线射影点性质	165
2. 抛物线的切线射影点性质	167
三. 基本光学性质的生成结论	167

1. 聚焦点的等角性质	167
2. Poncelet小定理	169
3. 焦半径坐标公式的几何意义	170
四. 焦点三角形的内切圆性质	171
五. 焦点三角形的旁切圆性质	174
CHAPTER 2	177
中点、切线与渐近线综合	177
一. 中点点差生成	177
1. 中点点差法	177
2. 中点点差法与第三定义的联系	179
3. 中点轨迹的方程 (曲线方程)	179
4. 中点弦的方程 (直线方程)	180
二. 切线、切点弦及其性质	181
1. 圆锥曲线的切线及其求法	181
2. 圆锥曲线的切线方程	183
3. 圆锥曲线的切点弦方程	184
4. 焦点准线情况下的切线性质	185
三. 内、外准圆与动心圆	186
1. 内准圆	186
2. 外准圆 (蒙日圆)	188
3. 动心圆	189
四. 双曲线的渐近线	191
1. 渐近线及其方程	191
2. 渐近线焦点三角形的性质	191
3. 特殊双曲线及其离心率求法	193
五. 渐近线的性质	194
CHAPTER 3	199
离心率问题综合	199
一. 离心率问题的核心	199
二. 斜率关联离心率	200
三. 长度关联离心率	202
1. 圆锥曲线的第二定义	202
2. 焦半径与焦点弦	203
3. 标准焦点三角形的相关长度	204
四. 角度关联离心率	204
1. 焦点三角形的最大角	204
2. 余弦定理应用	205
3. 正弦定理应用	206
4. 共焦圆锥曲线的角度	207
CHAPTER 4	210
联立补充方法	210
一. 二次同解	210
1. 公解与公解直线	210
2. 同解原理	210
3. 二次同解的应用	211
二. 退化曲线联立——直线与直线的特殊联立	214
1. 退化曲线	214

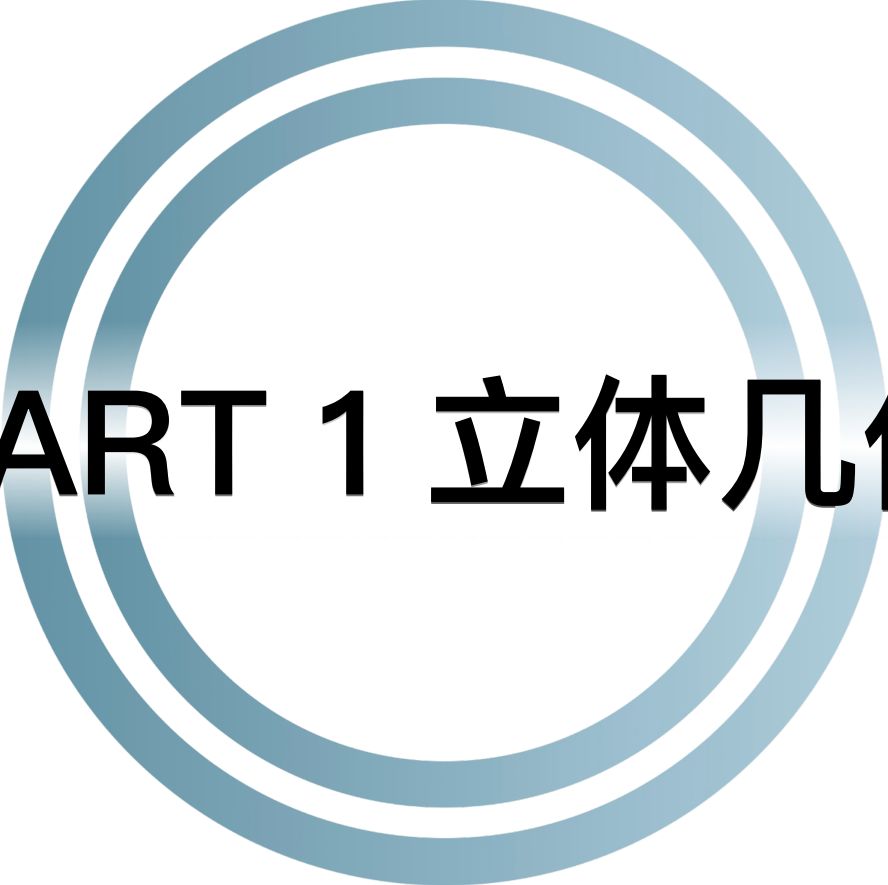
2. 退化曲线与直线联立	215
三. 解点法的进阶使用	219
1. 非轴点型解点	219
2. 解点后优化处理	219
3. 系数调整法	221
四. 切线问题的综合处理	223
1. 单切线问题的处理	224
2. 双切线问题的处理	225
3. 多切线问题的处理	229
CHAPTER 5	231
定点调整与斜率调整	231
一. 第三定义的推广与斜率调整原理	231
1. 调整法前置基础	231
2. 第三定义的推广	231
3. 斜率调整法原理与适用条件	232
4. 斜率调整的一般构造与结论	233
5. 图示化理解斜率调整的构造	233
二. 斜率调整的应用	234
1. 单次斜率调整	234
2. 多次斜率调整	238
3. 斜率调整与齐次化结合	240
三. 定点弦与定点调整原理	242
1. 定点调整法原理	242
2. 定比点差	242
3. 定点调整连等式推导	244
4. 两种调整法的本质区别	244
四. 轴点的对称、非对称调整	245
1. 轴点对称调整及相关结论	245
2. 轴点非对称调整的处理	249
五. 非轴点的对称、非对称调整	256
1. 非轴点对称调整及相关结论	256
2. 非轴点非对称调整的处理	258
CHAPTER 6	264
仿新齐次化	264
一. 仿新齐次化原理	264
1. 斜率的二次函数与方程	264
2. 斜率替换原理	264
3. 仿新齐次化一般流程	264
4. 补充斜率模型	265
二. 三点型顶点式推导及其应用	266
1. 顶点式示例	266
2. 顶点式的一般推导	266
三. 三点型一般式推导及其应用	272
1. 一般式示例	272
2. 一般式的一般推导	273
四. 仿新齐次化的多次使用	279
CHAPTER 7	282

抛物线的两点式与阿基米德	282
一. 抛物线的坐标、参数两点式	282
1. 抛物线的坐标两点式	282
2. 抛物线的参数两点式	282
3. 抛物线两点式的应用	283
二. 阿基米德三角形	286
1. 阿基米德三角形的概念	286
2. 抛物线阿基米德三角形的性质	286
3. 抛物线的特殊阿基米德三角形性质	290
CHAPTER 8	292
点乘法与向量基底化	292
一. 两类点乘法	292
1. 第一类点乘法	292
2. 第二类点乘法	293
3. 两类点乘法的使用	293
4. 面积最值取等问题分析	297
二. 直线的参数方程与极坐标	298
1. 直线的参数方程	298
2. 直线参数方程的性质与运算	298
3. 传统极坐标系概念（老教材）	301
4. 向量化极坐标的等价替代（新教材适用）	302
三. 非单位向量的基底化转化	305
1. 共线线段的向量转化	305
3. 共线向量参数的同构化	308
4. 夹角余弦方程	309
5. 定点调整对比例的使用	311
6. 向量外积转化面积	312
PART 5 导数	314
CHAPTER 1	315
极值点的判定	315
一. 极值点判定的导数阶位特征与演变规律	315
1. 条件形式与理解	315
2. 结论归纳	315
3. 规律背后的导数传递链	316
二. 极值点命题的证明范式与逻辑还原	317
三. 极值点判定命题的含参讨论与范围锁定	318
CHAPTER 2	321
动态分析	321
一. 出题人是怎么造出“恒成立”题目的？	321
1. 命题原理	321
2. 解题原理	322
二. 自变量分析：取等类型、取等判定、取等性质	322
1. 局部取等情形	322
2. 公切取等 vs 边界取等	322
3. 取等的双轨分析	323
三. 参数分析：参数影响函数运动	324

1. 参数对取等点的影响（黏性取等、非黏性取等）	324
2. 由取等判定参数边界值	324
3. 排除参数影响→得到定点	325
4. 参数对函数的影响	325
四. 恒成立问题动态分析	327
1. 构建单调性框架图	327
2. 动态分析操作流程	327
3. 标准过程书写	329
4. 扩展—利用不等式生成快速判定参数临界值	338
5. 使用动态分析的前提	339
五. 零点问题动态分析	344
1. 零点问题与恒成立：动态分析的统一	344
2. 零点问题动态分析流程	344
六. 一般化动态分析	347
1. 位置参数与形状参数作用动态分析	347
2. 极值点轨迹	347
3. 基于定点的动态变化命题及其在极值点轨迹视角下的推广	348
4. 函数随参数对称性动态变化	350
5. 水平平移&伸缩变换动态分析	352
七. 结构化动态分析	355
1. 线性结构	355
2. 抛物线结构	356
3. 含参复合结构	356
八. 主元含参动态分析	358
1. 换元解除参数耦合	358
2. 含参二次结构处理	359
3. 主元分界点一般化动态分析	360
CHAPTER 3	363
多变量与消元	363
一. “三元”相切取等问题的消元——零点比大小、双参和积类问题	363
二. 不含参相异函数各点关系	365
三. 含参相异函数各点关系	366
CHAPTER 4	367
偏移问题	367
一. 命题与变量内在逻辑	367
1. 参数 a 与交点 x_1, x_2 的意义	367
2. 待证式 $h(a)$ 的理解	368
二. 偏移命题分类	368
1. 待证不等式的“取等”	368
2. 待证式等价变量分离结构	368
3. 变量分离结构的合理选取	370
4. 偏移命题分类	370
三. 调整变量分离结构解决偏移问题	371
1. 调整策略与结构选取	371
2. 三种类型调整函数的选取策略与待定方式	372
四. 调整变量分离结构的速率控制	375
五. 调整变量分离结构的书写过程	375

TUTORCAT

1. 待定过程	375
2. 书写过程	375
六. 高精度偏移问题调整方式	378
七. “二次拟合”的局限性	380
八. 双参偏移问题调整方式	381
九. 和积变量分离结构与等价命题调整法	381
十. 定比加权形式的偏移结论	383
十一.对称构造	383
1. 对称构造处理单调类待证式	383
2. 对称构造处理零点类待证式	384
3. 对称构造的局限性	384
FINAL CHAPTER	386
信息直观化翻译	386
一. 新高考I卷T19核心特征	386
二. 翻译与量化流程	386



PART 1 立体几何

CHAPTER 1

空间角与射影

CHAPTER OBJECTIVES

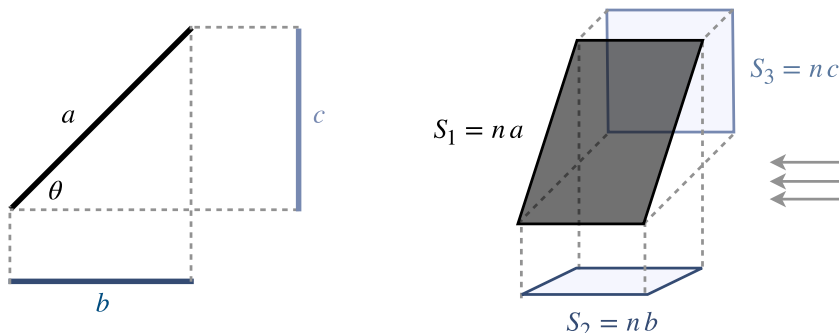
高考立体几何的灵魂在于“角”与“距离”。本章旨在带你彻底拆解线线角、线面角、二面角的构造逻辑。通过学习射影与各类余弦定理，你将能够从复杂的几何图形中迅速“提炼”出目标角，并实现从定性分析到定量计算的精准跨越。

掌握构造法 无论题目如何变化，你将学会利用“三垂线定理”及“射影法”还原角的本原，实现空间图形的“二维降维”。

模型化思维 通过“三正弦”、“三余弦”及“空间余弦定理”的学习，你将构建起一套应对空间角问题的通用数学模型。在面对高考中常见的旋转体、多面体折叠等难点问题时，能够迅速调用这些定理进行快速求解。

一. 投影与面积

1. 射影面积定理



如图所示，若直线段长度为 a ， b 为其在平面上的射影长度， θ 为该直线段与平面所成的角，则有：

$$\cos \theta = \frac{b}{a}, \quad \sin \theta = \frac{c}{a}$$

其中 c 为直线段在垂直方向上的投影长度。

将 n 条长度分别为 a, b, c 的线段组合成平面图形（如右图），当 n 足够大时，上述关系可推广至面积：

$$\cos \theta = \frac{nb}{na} = \frac{S_2}{S_1}, \quad \sin \theta = \frac{nc}{na} = \frac{S_3}{S_1}$$

其中 S_1 为原平面图形的面积， S_2 为其在投影平面上的射影面积。该结论即 **射影面积定理**，它为求解立体几何中的二面角提供了一种简便方法。

2. 射影面积定理的向量推广

假设平面 S_1 ，其单位法向量为 $\vec{n}_1$ ，面积为 S_1 。我们要将其投影到另一个平面 S_2 上，该平面的单位法向量为 $\vec{n}_2$ 。两个平面之间的二面角 θ ，实际上就是它们的法向量 $\vec{n}_1$ 与 $\vec{n}_2$ 之间的夹角 $\pi - \theta$ 的补角 θ 。

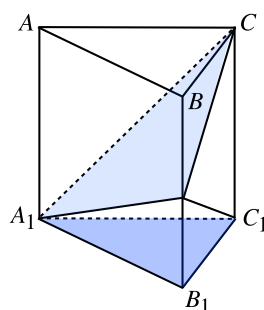
根据射影面积定理，投影后的面积 S_2 与原面积 S_1 的关系为：

$$S_2 = S_1 \cdot \cos \theta$$

由于 $\vec{n}_1$ 和 $\vec{n}_2$ 都是单位向量，根据点积的定义 $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = |\vec{n}_1| |\vec{n}_2| \cos(\pi - \theta) = \cos \theta$ ，上述公式可以转化为：

$$S_2 = S_1 \cdot (\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2)$$

EXAMPLE 正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, E 是 BB_1 中点, $AB = 2$, $AA_1 = 4$, 求平面 A_1EC 和平面 $A_1B_1C_1$ 的二面角.



解析

此时 $A_1B_1C_1$ 是 A_1EC 竖直方向上的投影, 故对于二面角 θ :

$$\cos \theta = \frac{S_{\Delta A_1B_1C_1}}{S_{\Delta A_1EC}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

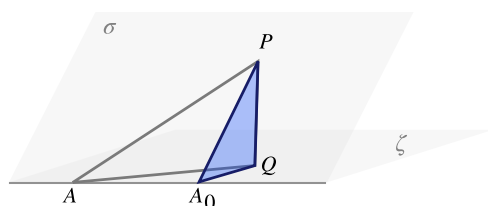
更多地 记平面 A_1EC 和平面 CEC_1 的二面角为 α , B_1C_1 中点为 M , 则

$$\cos \alpha = \frac{S_{\Delta MEC}}{S_{\Delta A_1EC}} = \frac{3}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

二. 三正弦定理、最大角问题、三余弦定理

在解决立体几何问题时, 最大的痛点往往是“空间感”不够。这两个定理的核心价值, 就是教你如何通过构建直角三角形, 把空间夹角问题转化回熟悉的平面三角计算。

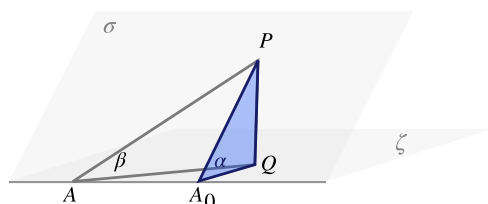
1. 最大角定理



最大角定理 如图, P 在平面 σ 上, Q 在平面 ζ 上, $PQ \perp$ 平面 ζ , A 为平面 ζ 和平面 σ 的交线 l 上, 则当 $AQ \perp l$ 时, $\angle PAQ$ 取得最大值.

原理 $\tan PAQ = \frac{PQ}{AQ}$, 而 PQ 为定值, 要使得 $\angle PAQ$ 最大, 即 $\tan PAQ$ 最大, 即 AQ 最小, 故临界情况为 $AQ \perp l$ 时.

2. 三正弦定理



三正弦定理 设 $\beta = \angle PAQ$, $\alpha = \angle PA_0Q$, 则

$$\sin \alpha = \frac{PQ}{A_0P}, \quad \sin \beta = \frac{PQ}{AP}$$

故 $\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{A_0P}{AP} = \sin \angle PA A_0$, 即 $\sin \beta = \sin \angle PA A_0 \cdot \sin \alpha$.

CHAPTER 2

几何法：静态构型与动态分析

CHAPTER OBJECTIVES

在立体几何的学习过程中，不仅考察基础概念的掌握，更考验在复杂图形中提取核心要素、构建逻辑模型的能力。许多同学在面对立体几何或动态几何问题时，常常陷入“看懂答案却无法自行求解”的困境，其核心原因往往在于缺乏宏观的构型预判意识，以及对几何变换本质的把握不足。

本章内容将划分为两大核心板块：

1. 静态空间分析：通过系统化的步骤，精准破解二面角求解、异面直线距离计算以及空间体顶点支撑模型等典型立体几何考点。
2. 多参数动态变换：深入探讨单参数与多参数变换的分析思路，通过将空间问题平面化、动态问题静态化，实现复杂几何问题的降维打击。

通过对本章中典型模型与方法的学习，你将对几何构型的敏锐感知，在复杂的题目中迅速识别不变要素与变换要素，从而显著提升解题的思维跨度与效率。

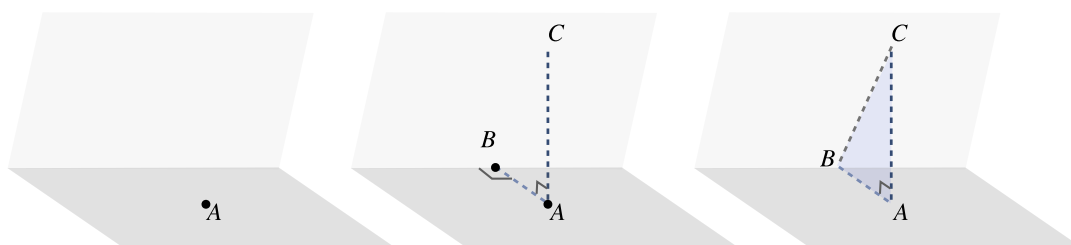
在阅读过程中，请配合示意图进行几何直观的建立，并在掌握每种模型后，尝试将该方法应用到未给出的类似变式题中，以真正内化这些解题模型。

一. 静态分析

1. 二面角

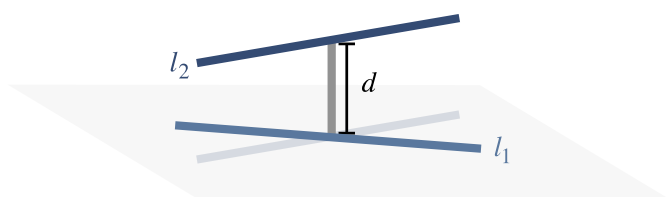
二面角 (dihedral angle) 是指两个平面之间的夹角。在几何中，它描述了两个相交平面之间的相对倾斜程度，取值范围是从 0° 到 180° ，两平面相交于 **交线**，记为 l ；可以按照以下步骤求解任意两个平面 α, β 的二面角：

1. 在 α 上任取一点 A ，过 A 作 $AB \perp l$ 于 H ，作 $AC \perp \alpha$ 交 β 于 C
2. 二面角即 $\angle ABC = \arctan \frac{AC}{AB}$

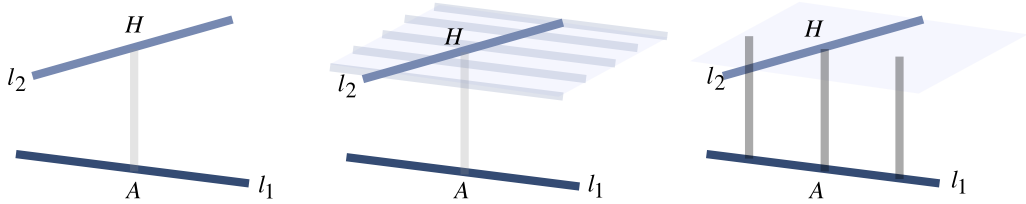


注意 如果是钝角，则需取互补的角

2. 异面直线距离



异面直线的距离是指两条不相交且不平行的直线之间的最短距离 d ，在两直线的公垂线上产生，可按照以下步骤求解：



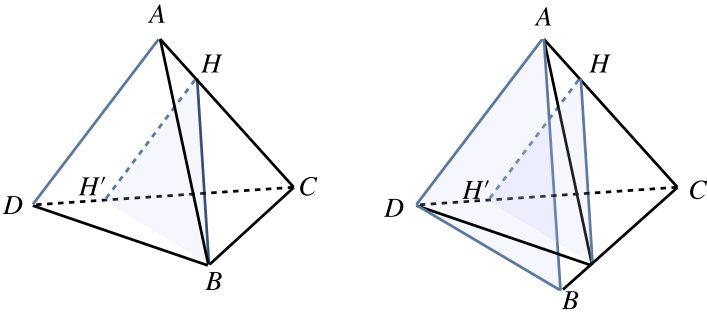
STEP 1 作出平面 α ，平面 α 满足 $l_1 \parallel$ 平面 α 且 $l_2 \subset$ 平面 α

STEP 2 取 l_1 上任意一点 A ，并计算 A 到平面 α 距离 d ，即异面直线距离

EXAMPLE 正四面体 $A-BCD$ 棱长为4， H 为 AC 四等分点（靠近 A ），求 BH 与 AD 的距离 d 。

分析

取 $CH' = 3DH'$ ，则 $AD \parallel$ 平面 $HH'B$ ，故只需求 AD 上任意一点到平面 $HH'B$ 的距离 d ，按右图补形，可转换为 C 到平面 $HH'B$ 的距离，记为 D ，则 $d = \frac{1}{3}D$ ；



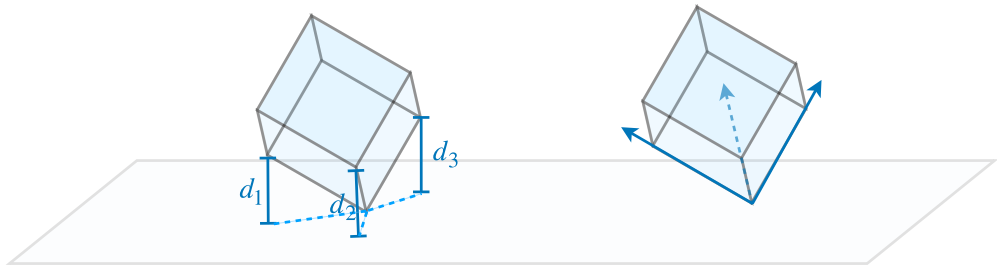
由 $\frac{1}{3}DS_{HH'B} = V_{B-H'CH} = \frac{9}{16}V_{B-ACD} = 3\sqrt{2}$ ，故只需求 $S_{HH'B}$ ：

$$BH = H'B = \sqrt{13}, HH' = 3$$

$$\text{故 } S_{HH'B} = \frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{13 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{43}}{4}, \text{ 故 } D = 9\sqrt{2} \times \frac{4}{3\sqrt{43}} = \frac{12\sqrt{86}}{43}, d = \frac{4\sqrt{86}}{43}.$$

3. 空间体顶点支撑

对于一个空间体，其中空间体的一个顶点支撑在平面上，而其余顶点位于空间中。在目前出现的考题中，这种模型通常为正方体顶点支撑模型：我们以离与平面接触的顶点 O 最近的三个点 A, B, C 到平面的距离 d_1, d_2, d_3 为参数，量化此模型，同时，如右图以 O 为原点建立空间直角坐标系 $O-xyz$ ：



令正方体边长为1，则 $\vec{OA} = (1,0,0)$ ， $\vec{OB} = (0,1,0)$ ， $\vec{OC} = (0,0,1)$ ，记平面法向量为 $\vec{n} = (a,b,c)$ ，则

$$d_1 = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, d_2 = \frac{\vec{OB} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, d_3 = \frac{\vec{OC} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

因此 $d_1 : d_2 : d_3 = a : b : c$ ，正方体上其他点到平面的距离也可通过此方法转换。

二. 动态分析

1. 单参数变换

单参数变换 是指在几何学或其他数学系统中，某个对象的状态仅通过一个独立变量（参数）发生变化，而其他条件保持不变。

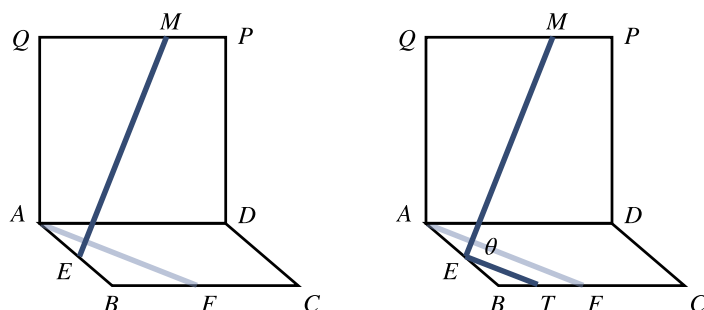
对于这类变换，我们可以按照以下三步进行分析：

STEP 1 识别不变要素 确定哪些几何特征在变换过程中保持不变，如固定点、固定形状、固定平面或结构等；

STEP 2 解析变换要素 分析具体发生变化的部分，如点的位置、角度的大小等；

STEP 3 等价&转化 将问题转化或等价于不变要素与变换要素的组合形式，简化分析与解决过程。

EXAMPLE 1 如图所示，四边形 $ABCD$ 和四边形 $ADPQ$ 均为正方形，它们所在的平面相互垂直，动点 M 在线段 PQ 上， E, F 分别为 AB, BC 的中点，设异面直线 EM 与 AF 所成的角为 θ ，求 $\cos \theta$ 的最大值。



分析 按照单参数变换的分析步骤进行分析：

STEP 1 识别不变要素 除了 M 点外的所有结构

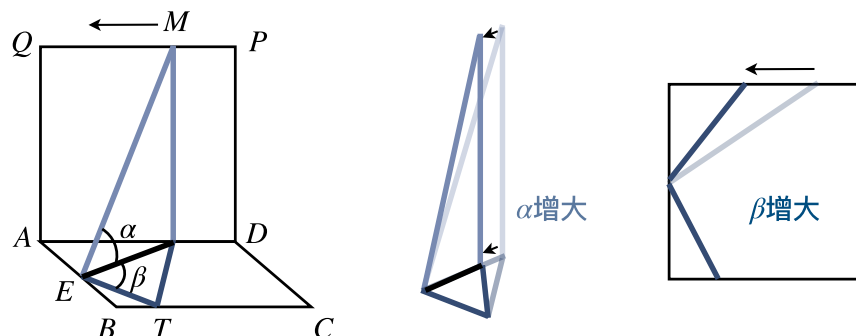
STEP 2 解析变换要素 M 点的位置在线段 QP 上

STEP 3 将问题转化 θ 为异面直线夹角，故考虑平移其中一条直线，转换到同一平面上处理，取 BF 中点 T ，连接 ET ，则 $\theta = \angle MET$ ； $\cos \theta$ 的最大值及 θ 的最小值，下面将求 θ 的最小值作为目标，分析 M 点在线段 QP 上的位置与 θ 大小的关系即可。

问题转换 过 M 作 $MH \perp AD$ 于 H ，记 $\alpha = \angle MEH$ ， $\beta = \angle TEH$ ，直观上便可知道 α 越大或 β 越大，则 θ 越大的正相关关系，当然，也可以根据三余弦定理 $\cos \theta = \cos \alpha \cdot \cos \beta$ 严谨说明；因此，下面分析 M 的运动对 α, β 的影响即可，假设 M 由 P 向 Q 移动：

$|MH|$ 不变， $|EH|$ 减小，故 α 增大；

ET 为不变要素， EH 以 E 为圆心，逆时针转动，故 β 增大；



因此，可以得出结论：假设 θ 是锐角， M 越靠近 Q ， θ 越大， M 越靠近 P ， θ 越小，故 M 与 P 重合时， $\cos \theta$ 最大；

$$\max\{\cos \theta\} = \cos \angle TEP$$

4. 几何体中球体填充问题

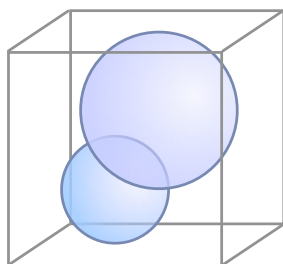
几何体中包含多个球的情况是一类经典的三维几何问题，通常涉及球体与多面体之间的空间关系。

研究意义：这种几何体与球体的组合展示了复杂的空间关系，通常用于探索几何体内最大球的排列、密堆积问题，或展示对称性和体积填充等概念。

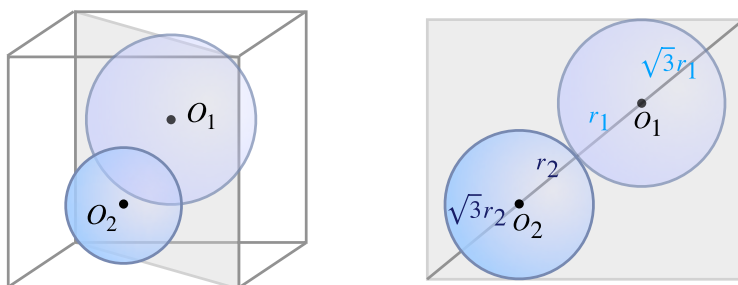
针对这类问题，解决问题的核心方向为：

连接圆心，研究由多个半径构成的长度关系

EXAMPLE 1 将两个观赏球体封闭在一个正方体容器内，设正方体的棱长为1，求两个球体体积之和的最大值。



分析 设两球球心分别为 O_1, O_2 ，半径分别为 r_1, r_2 ，作两球球心所在截面：



根据右图几何关系：对角线长度 $= (1 + \sqrt{3})(r_1 + r_2) = \sqrt{3}$ ，则 $r_1 + r_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$ ，不妨设

$$0 < r_1 \leq r_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} - r_1 \leq \frac{1}{2}$$

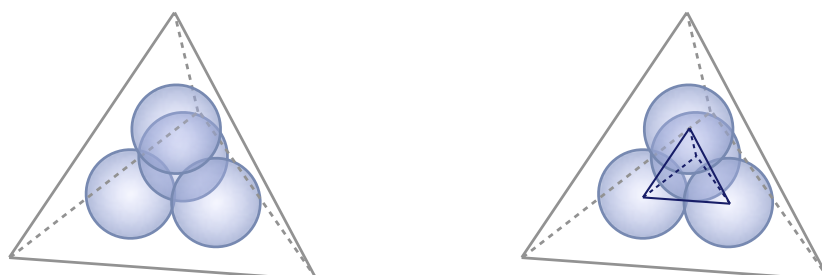
解得 $\frac{2 - \sqrt{3}}{2} \leq r_1 \leq \frac{3 - \sqrt{3}}{4}$ ，故

$$V_1 + V_2 = \frac{4}{3}\pi(r_1^3 + r_2^3) = \frac{4}{3}\pi(r_1 + r_2)(r_1^2 + r_2^2 - r_1r_2) = \frac{4}{3}\pi(r_1 + r_2)[(r_1 + r_2)^2 - 3r_1r_2]$$

只需求 $-3r_1r_2$ 最大值，则 $-3r_1r_2 = 3r_1^2 - \frac{9 - 3\sqrt{3}}{2}r_1$ ，当 $r_1 = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$ 时， $-3r_1r_2$ 取得最大值，则

$$V_1 + V_2 \geq \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{3 - \sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{12 - 6\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3} - 6}{4} \right) = \frac{9 - 5\sqrt{3}}{2}\pi$$

EXAMPLE 2 在一个棱长为4的正四面体容器放入4个完全相同的小球（完全进入），求小球半径的最大值。





PART 2 数列

CHAPTER 1

数列的奇偶项分析

章节目标 CHAPTER OBJECTIVES

在数列综合题中，奇偶项问题常因规律隐蔽、分类繁琐成为失分重灾区。其核心难点在于缺乏对“离散结构”的拆解能力，以及未能掌握“化整为零”的转化思想。

学习本章后，你需要能够：

1. 剖析奇偶项本质：厘清奇偶子列与原数列关系，攻克含 $(-1)^n$ 的通项讨论与分段表达。
2. 构建隔项规律模型：识别隔项等差、等比特征，实现从特殊到一般的通项求解。
3. 运用多维求和策略：整合分类、并项及裂项相消法，捕捉周期规律以简化运算。

一. 奇偶项定义

1. 奇偶子列与奇偶项

子列的定义 给定数列 $\{a_n\}$ ，若 $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ ($k \in \mathbf{N}^*$) 是一列严格单调递增的正整数，则由它们对应项组成的数列 $\{a_{n_k}\}$ ，称为数列 $\{a_n\}$ 的一个子列。

奇偶子列 在数列 $\{a_n\}$ 的子列中，最特殊的两个字列分别为奇数列与偶子列：

奇子列与奇数项：若 $n_k = 2k - 1$ ，则子列 $\{a_{2k-1}\}$ 称为 $\{a_n\}$ 的奇子列，其中的每一项称为 $\{a_n\}$ 的奇数项

偶子列与偶数项：若 $n_k = 2k$ ，则子列 $\{a_{2k}\}$ 称为 $\{a_n\}$ 的偶子列，其中的每一项称为 $\{a_n\}$ 的偶数项

2. 奇偶项分段

通项分段 在项数 n 取不同奇偶数时，数列 $\{a_n\}$ 通项公式不同，此时可用分段形式表示

$$a_n = \begin{cases} f(n), n = 2k - 1 \\ g(n), n = 2k \end{cases}, k \in \mathbf{N}^*$$

若用 $n = 2k - 1$ 或 $n = 2k$ 来描述奇偶项，则也可以写成

$$a_{2k-1} = f(2k - 1), a_{2k} = g(2k), k \in \mathbf{N}^*$$

递推分段 在项数 n 取不同奇偶数时，数列 $\{a_n\}$ 的递推公式不同，此时可用分段形式表示

$$a_{n+1} = \begin{cases} f_1(a_n) + g_1(n), n = 2k - 1 \\ f_2(a_n) + g_2(n), n = 2k \end{cases}$$

若用 $n = 2k - 1$ 或 $n = 2k$ 来描述奇偶项，则也可以写成

$$a_{2k} = f_1(a_{2k-1}) + g_1(2k - 1), a_{2k+1} = f_2(a_{2k}) + g_2(2k)$$

用 k 描述通项得到 a_k ，最终还可以令 $n = k$ 换回 a_n ，只是用 k 作了个桥梁而已

例1 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1, n \text{ 为奇数} \\ a_n + 2, n \text{ 为偶数} \end{cases}$ ，记 $b_n = a_{2n-1}$, $c_n = a_{2n}$ ，求 b_n 与 c_n 。

分析 由题可得 $a_{2n} = a_{2n-1} + 1$, $a_{2n+1} = a_{2n} + 2$, $a_{2n+2} = a_{2n+1} + 1$ ，联立得

$$a_{2n+1} = a_{2n-1} + 3, a_{2n+2} = a_{2n} + 3$$

二. 数列的不动点

1. 递推数列

定义 数列 $\{a_n\}$ 的第 $n+k$ 项由其前 k 项、以及 n 组成, 则数列 $\{a_n\}$ 成为**递推数列**, 记为

$$a_{n+k} = f(a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k-1}, n)$$

其中 k 成为递推数列 $\{a_n\}$ 的**阶数**.

例如 若 $a_{n+1} = 2a_n + 1$, 则 $\{a_n\}$ 是一阶递推数列; 若 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, 则 $\{F_n\}$ 是二阶递推数列.

递推生成函数 若一阶递推数列的递推公式为 $a_{n+1} = f(a_n)$, 则 $y = f(x)$ 为 $\{a_n\}$ 的**递推生成函数**.

举例 若 $a_{n+1} = 2a_n + 1$, 则 $\{a_n\}$ 的递推生成函数为 $f(x) = 2x + 1$;

若 $b_{n+1} = \sqrt{b_n^2 + 1}$, 则 $\{b_n\}$ 的递推生成函数为 $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

在 $a_{n+1} = f(a_n)$ 中只含有 a_n 不含有 n , 则数列 $\{a_n\}$ 才有递推生成函数.

2. 数列的迭代过程

迭代 (Iteration) 是一阶递推数列生成一系列项的核心机制: 给定一个初值和一个函数, 通过不断重复应用该函数得到一系列项.

迭代过程 若数列 $\{a_n\}$ 的递推生成函数为 $f(x)$, 即 $a_{n+1} = f(a_n)$, 则

$$a_2 = f(a_1), a_3 = f(a_2) = f(f(a_1)), \dots, a_{n+1} = f(f(\dots f(a_1)))$$

即生成得到的一系列项均可用初值 a_1 表示.

迭代的映射原理 将递推生成函数 $f(x)$ 看作**递推映射** f , 则每一次迭代都是对 a_1 进行一次映射, 即

$$a_1 \xrightarrow{f} a_2 \xrightarrow{f} a_3 \xrightarrow{f} \dots \xrightarrow{f} a_n \xrightarrow{f} a_{n+1}$$

若给初值 a_1 , 则 $a_1 \xrightarrow{f \circ f \circ \dots \circ f} a_{n+1}$, 即经过 n 次递推映射使 a_1 变为 a_{n+1} .

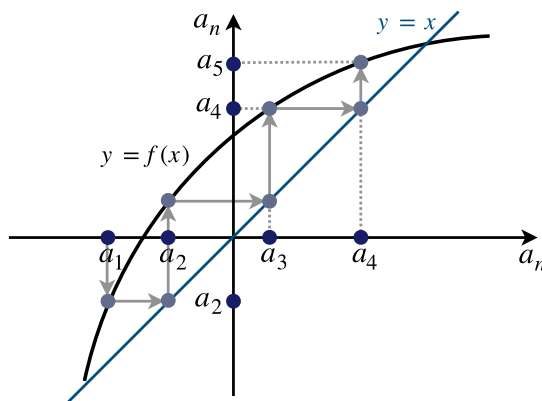
迭代特例 若递推映射 f 为恒等映射 I , 即 $f(x) = x$, 则

$$a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n = a_{n+1}$$

在恒等映射下, 整个迭代过程就像没发生一样, 始终保持着原有的状态 (初值)

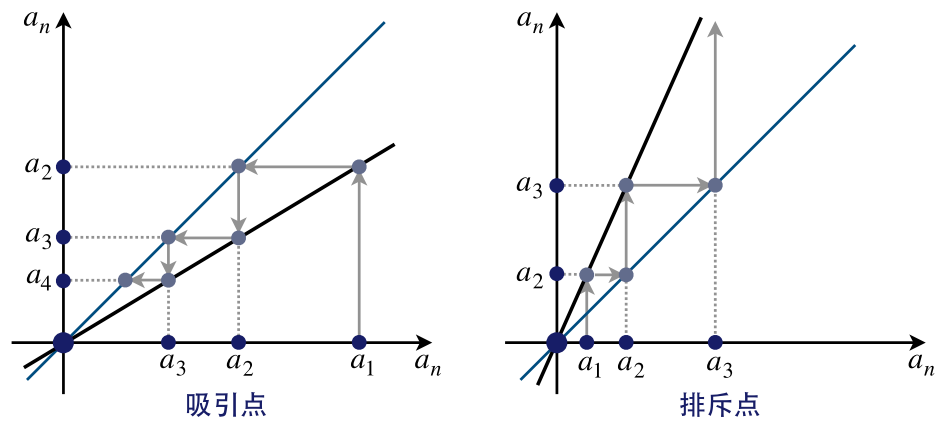
3. 蛛网图——几何化视角下的数列迭代

蛛网图 (也称迭代图) 是研究一阶递推数列 $\{a_n\}$ 性质 (如单调性、收敛、发散、周期性) 最直观的几何工具.



构图过程 将数列 $\{a_n\}$ 所有取值构成的集合作为 x 轴与 y 轴,

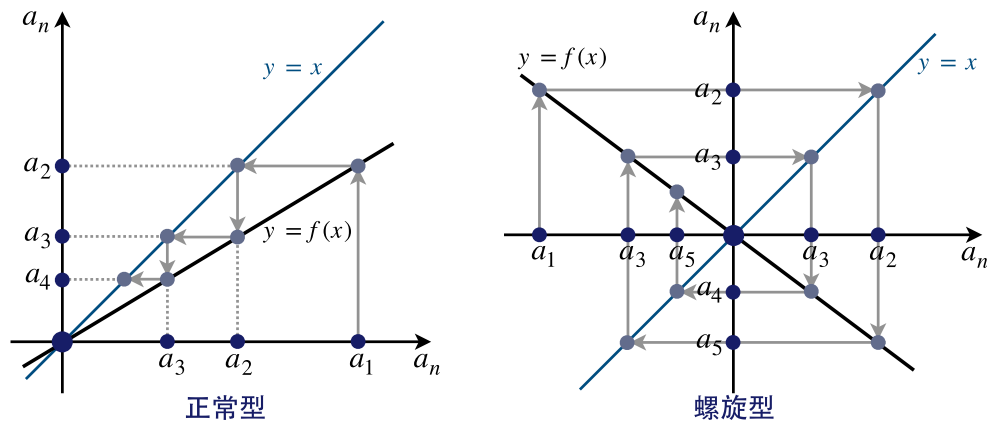
STEP 1 画出生成函数 $y = f(x)$ 与回弹线 $y = x$ 的图像



3. 形态 (正常/螺旋)

形态分类	条件 (x_0 附近)	特征
正常型 (Monotonic)	$f'(x) > 0$	a_n 从 x_0 一侧单调地靠近或远离不动点 x_0 , 呈现“阶梯状”轨迹
螺旋型 (Oscillating)	$f'(x) < 0$	a_n 从 x_0 两侧交替地靠近或远离不动点 x_0 , 呈现“螺旋状”轨迹

形态决定了数列 $\{a_n\}$ 趋向或远离不动点的路径方式



例如 判断下列递推数列不动点的二重性:

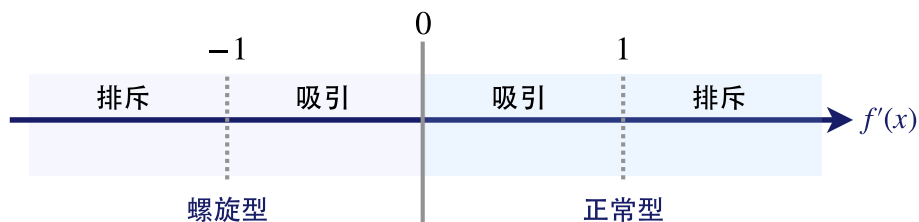
(1) $a_{n+1} - 3a_n = 4$; (2) $a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n$; (3) $a_{n+1} = \frac{4a_n - 2}{a_n + 1}$.

分析 (1) 易得 $f(x) = 3x + 4$, 则 $f'(x) = 3$, 即正常型排斥不动点;

(2) 易得 $f(x) = x^2 - 2x$, 令 $f(x) = x$, 得不动点 $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, 又 $f'(x_1) = -2$, $f'(x_2) = 4$, 所以 $x_1 = 0$ 是螺旋型排斥点, $x_2 = 3$ 是正常型排斥点;

(3) 易得 $f(x) = \frac{4x - 2}{x + 1}$, 令 $f(x) = x$, 得不动点 $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, 因为 $f'(x_1) = \frac{3}{2} > 1$, $f'(x_2) = \frac{2}{3} < 1$, 所以 $x_1 = 1$ 是正常型排斥点, $x_2 = 2$ 是正常型吸引点.

总结 数列不动点的稳定性与形态可以按下图来简化记忆



2. 排斥不动点的情况

特征 排斥不动点 x_0 无论是正常型还是螺旋型，最终数列 $\{a_n\}$ 都将发散，且数列 $\{a_n\}$ 的单调性由

不动点的形态 与 初值生成区间 决定

分类	初值生成区间	单调性	极限
正常型	$a_1 < x_0$	$a_{n+1} < a_n < x_0$	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$
	$a_1 > x_0$	$x_0 < a_n < a_{n+1}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$
螺旋型	$a_1 < x_0$	$a_{2n+1} < a_{2n-1} < x_0 < a_{2n} < a_{2n+2}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} = -\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = +\infty$
	$a_1 > x_0$	$a_{2n+2} < a_{2n} < x_0 < a_{2n-1} < a_{2n+1}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} = +\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = -\infty$

除非初值 a_1 刚好在中心点 x_0 ，否则只要偏了一点，就会被疯狂推开

3. 流动图——动态全景图

流动图 是分析一阶递推数列动态特性的可视化利器。

通过在数轴上抽象出不动点性质的‘动力场’，将复杂的迭代过程简化为直观的几何流动，能够跨越繁琐的数值计算，一眼洞穿数列的单调性演化与终极极限归宿

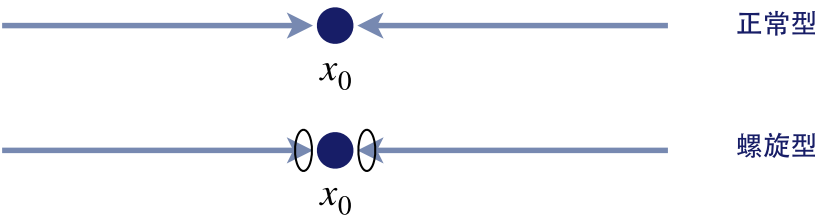
绘制流动图的三步走 要绘制一张完整的流动图，需要按三个步骤进行：

STEP 1 标定不动点 首先在数轴上标出不动点，并作稳定性标识

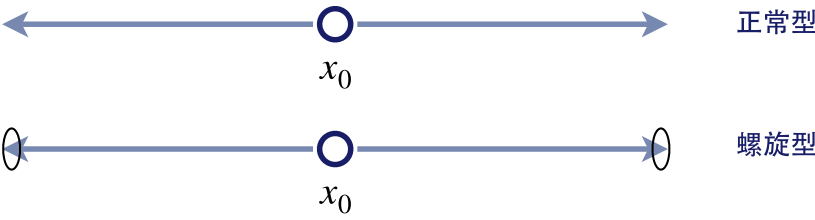


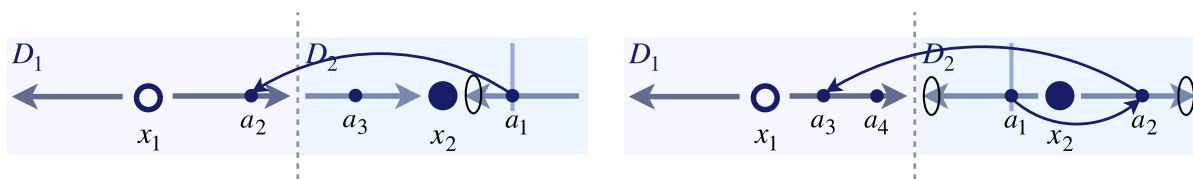
STEP 2 确定流向箭头（稳定性与形态）

吸引（向心流）在 x_0 两侧画出指向不动点的箭头，螺旋型附加螺旋圈



排斥（离心流）在 x_0 两侧画出背离不动点的箭头，螺旋型附加螺旋圈





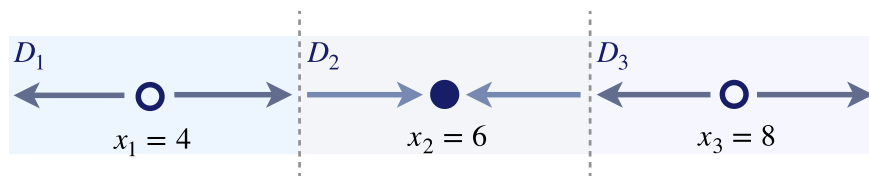
4. 动力传递的临界判断（管辖权的逾越）：当 $\{a_n\}$ 将要脱离螺旋不动点的控制时，需要判断下一项生成在另一个不动点的位置，而在其中存在这可以分析相对位置的临界，具体分析在后面介绍。

EXAMPLE 1 (2023·北京) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n - 6)^3 + 6$, 下列说法正确的是

- A. 若 $a_1 = 3$, 则 $\{a_n\}$ 是递减数列, $\exists M \in \mathbf{R}$, 使得 $n > m$ 时, $a_n > M$
 B. 若 $a_1 = 5$, 则 $\{a_n\}$ 是递增数列, $\exists M \geq 6$, 使得 $n > m$ 时, $a_n < M$
 C. 若 $a_1 = 7$, 则 $\{a_n\}$ 是递减数列, $\exists M > 6$, 使得 $n > m$ 时, $a_n > M$
 D. 若 $a_1 = 9$, 则 $\{a_n\}$ 是递增数列, $\exists M \in \mathbf{R}$, 使得 $n > m$ 时, $a_n < M$

解析

易得 $f(x) = \frac{(x-6)^3}{4} + 6$, 令 $f(x) = x$, 得 $x_1 = 4, x_2 = 6, x_3 = 8$, 又 $f'(x) = \frac{3(x-6)^2}{4}$, $f'(x_1) = f'(x_3) = 3$, $f'(x_2) = 0$, 所以 x_1 和 x_3 是正常型排斥点, x_2 是超吸引点, 画出流动图:



对于A, 因为 $a_1 = 3 < x_1$, 所以 $a_{n+1} < a_n < x_1 = 4$, 故A错;

对于B, 因为 $x_1 < a_1 = 5 < x_2$, 则由 a_1 生成的一系列项会被 x_1 排斥向 x_2 , 所以 $x_1 = 4 < a_n < a_{n+1} < x_2 = 6$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 6$, 故B对;

对于C, 因为 $x_2 < a_1 = 7 < x_3$, 则由 a_1 生成的一系列项会被 x_3 排斥向 x_2 , 所以 $x_2 = 6 < a_{n+1} < a_n < x_3 = 8$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 6$, 所以不存在, 故C错;

对于D, 因为 $a_1 > x_3 = 8$, 所以 $x_3 = 8 < a_n < a_{n+1}$, 故D错; 所以选B.

EXAMPLE 2 (多选) 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = a, a_{n+1} = a_n^2 - 4a_n + b$, 则

- A. 当 $b > \frac{25}{4}$, $\forall a \in \mathbf{R}$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 为递增数列
 B. 当 $b = 4, a > 4$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 为递增数列
 C. 当 $b = 0, a = 5$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 为常数列
 D. 当 $b = 0, a = \frac{9}{2}$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 为递减数列

解析

易得 $f(x) = x^2 - 4x + b$, 令 $f(x) = x$, 得 $x^2 - 5x + b = 0$, 若该方程有解, 则 $b \leq 25/4$, 所以B、C、D均存在不动点;

对于A, 因为 $b > \frac{25}{4}$, 所以不存在不动点, 又 $a_{n+1} - a_n = (a_n - \frac{5}{2})^2 + b - \frac{25}{4} > 0$, 所以 $a_{n+1} > a_n$, 则数列 $\{a_n\}$ 为递增数列;

对于B, 得 $x_1 = 1, x_2 = 4$, 且 $f'(x_2) = 4$, 所以 $x_2 = 4$ 是正常型排斥点, 又 $a_1 = a > 4$, 所以 $a_{n+1} > a_n$, 则数列 $\{a_n\}$ 为递增数列, 所以B对;

$$\frac{a_{n+1} - x_0}{a_n - x_0} = \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}$$

才是研究的核心，而为了能够精确地得到放缩结论，则需要对 $\frac{a_{n+1} - x_0}{a_n - x_0}$ 作精密的分析：

不动点的分式方程 设数列 $\{a_n\}$ 的正常型不动点为 x_0 ，初值为 a_1 ，由不动点分解定理可得

$$f(x) - x_0 = (x - x_0) \cdot g(x)$$

代入 a_n 得 $\frac{a_{n+1} - x_0}{a_n - x_0} = g(a_n)$ ，从中可得，故 $g(a_n)$ 即为研究的主要对象，而 $g(x)$ 为割线函数，表示为

$$g(x) = \frac{f(x) - x_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

几何含义 曲线 $y = f(x)$ 上动点 $(x, f(x))$ 与不动点 $(x_0, f(x_0))$ 连线所构成的割线斜率

$g(x)$ 的单调性 设由 x_0 与 a_1 形成的区间为 D ，分析 $g(x)$ 的单调性：

情况1 若 $f(x)$ 在 D 上为单调递增下凹函数，即 $f'(x) > 0$ ， $f''(x) > 0$ 在 D 上恒成立，则

$g(x)$ 在 D 上单调递增

易得 $g(x) = \frac{f(x) - x_0}{x - x_0}$ ，则 $g'(x) = \frac{f'(x) \cdot (x - x_0) - f(x) + x_0}{(x - x_0)^2}$ ，设 $h(x) = f'(x) \cdot (x - x_0) - f(x) + x_0$ ，则

$h'(x) = (x - x_0) \cdot f''(x)$ ，讨论：

当 $D = [a_1, x_0]$ 时， $a_1 \leq x < x_0$ ，则 $h'(x) < 0$ ，所以 $h(x) > h(x_0) = 0$ ，即 $g'(x) > 0$ ，故 $g(x)$ 单调递增。

当 $D = (x_0, a_1]$ 时， $x_0 < x \leq a_1$ ，则 $h'(x) > 0$ ，所以 $h(x) > h(x_0) = 0$ ，即 $g'(x) > 0$ ，故 $g(x)$ 单调递增。

情况2 若 $f(x)$ 在 D 上为单调递增上凸函数，即 $f''(x) < 0$ ， $f'(x) > 0$ 在 D 上恒成立，则

$g(x)$ 在 D 上单调递减

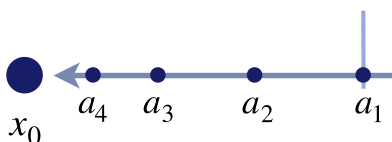
同理情况1可证情况2

归纳总结 若 $f'(x) > 0$ ，则 $g(x)$ 单调递增；若 $f''(x) < 0$ ，则 $g(x)$ 单调递减。

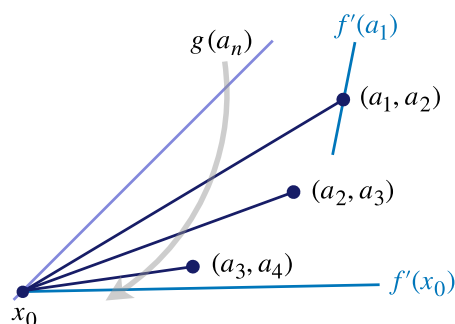
不动点分式放缩定理 根据不动点的稳定性（吸引/排斥）以及二阶导数 $f''(x)$ 的正负（函数的凹凸性），割线斜率 $g(a_n)$ 呈现出极强的单调规律，能为大题中的不等式放缩提供精确的上下界：

x_0 为正常型吸引点

当 $a_1 > x_0$ 时，绘出流动图，可得 $x_0 < a_{n+1} < a_n < \dots < a_1$

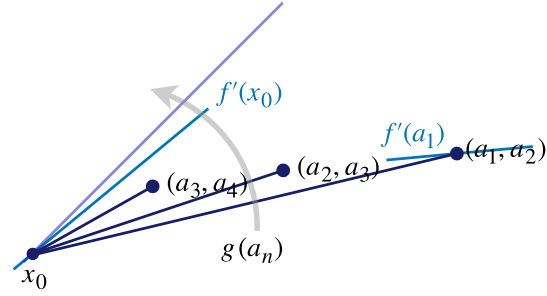


若 $f''(x) > 0$ ，即 $f(x)$ 为单调递增下凹函数，则



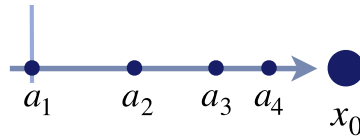
$f'(x_0) < g(a_{n+1}) < g(a_n) < \dots < g(a_1) < f'(a_1)$ ，即 $g(a_n)$ 随 a_n 的减小而减小

若 $f''(x) < 0$, 即 $f(x)$ 为单调递增上凸函数, 则

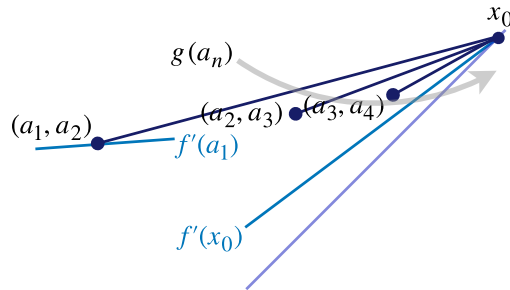


$f'(a_1) < g(a_1) < \dots < g(a_n) < g(a_{n+1}) < f'(x_0)$, 即 $g(a_n)$ 随 a_n 的减小而增大

当 $a_1 < x_0$ 时, 绘出流动图, 可得 $a_1 < \dots < a_n < a_{n+1} < x_0$

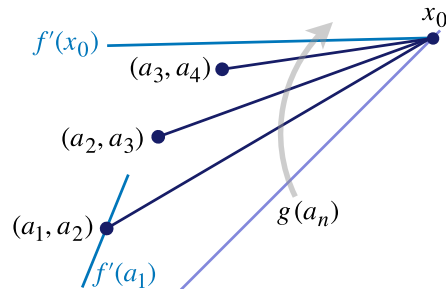


若 $f''(x) > 0$, 即 $f(x)$ 为单调递增下凹函数, 则



$f'(a_1) < g(a_1) < \dots < g(a_n) < g(a_{n+1}) < f'(x_0)$, 即 $g(a_n)$ 随 a_n 的增大而增大

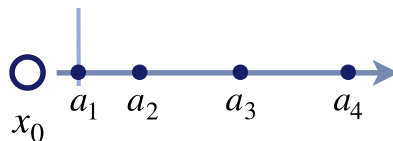
若 $f''(x) < 0$, 即 $f(x)$ 为单调递增上凸函数, 则



$f'(x_0) < g(a_{n+1}) < g(a_n) < \dots < g(a_1) < f'(a_1)$, 即 $g(a_n)$ 随 a_n 的增大而减小

x_0 为正常型排斥点

当 $a_1 > x_0$ 时, 绘出流动图, 可得 $x_0 < a_1 < \dots < a_n < a_{n+1}$



若 $f''(x) > 0$, 即 $f(x)$ 为单调递增下凹函数, 则

$\{b_n\}$ 严格单调递增, 且当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} n(n-1) \rightarrow +\infty$,

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln n}{n+1}}{2n-2} = \frac{1}{4}$, 结合不等式的证明方向, 可知只需要证:

$$\frac{\ln n}{n+1} < \frac{n-1}{2}$$

即证 $2 \ln n = \ln n^2 < n^2 - 1$, 由 $\ln x \leq x - 1$ 即可得证, 两侧求和得 $\frac{\ln 2}{3} + \frac{\ln 3}{4} + \cdots + \frac{\ln n}{n+1} < \frac{n(n-1)}{4}$.

Stirling (斯特林) 公式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!) \cdot e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = \sqrt{2\pi}, \text{ 或当 } n \rightarrow \infty \text{ 时, } n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Stirling 公式是用于取 n 的阶乘的近似值的公式.

EXAMPLE 3 (2023·天津卷) 证明: $\frac{5}{6} < \ln(n!) - (n + \frac{1}{2})\ln n + n$.

分析 变形得 $\frac{5}{6} < \ln \frac{(n!) \cdot e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$, 即对 Stirling 公式取对数后结果, 只需 $\frac{5}{6} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{(n!) \cdot e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = \ln \sqrt{2\pi}$, 又

$$\ln \sqrt{2\pi} = \frac{\ln 2\pi}{2} > \frac{\ln 6}{2} = \frac{\ln 2 + \ln 3}{2} > 0.9 > \frac{5}{6}$$

正常解法 令 $h(n) = \ln(n!) - (n + \frac{1}{2})\ln n + n$, 则 $h(n) - h(n+1) = (n + \frac{1}{2})\ln(1 + \frac{1}{n}) - 1$, 由不等式

$$\ln x \leq \frac{(x+5)(x-1)}{4x+2} \quad (x > 0)$$

令 $x = 1 + \frac{1}{n}$, 得 $\ln(1 + \frac{1}{n}) \leq \frac{6n+1}{6n^2+4n}$, 即

$$h(n) - h(n+1) = (n + \frac{1}{2})\ln(1 + \frac{1}{n}) - 1 \leq \frac{1}{4n(3n+2)} < \frac{1}{12}(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n})$$

两边从 2 到 $n-1$ 求和得 $h(2) - h(n) < \frac{1}{12}(1 - \frac{1}{n-1})$, 故 $h(n) > \frac{1}{12}(\frac{1}{n-1} - 1) + h(2) > \frac{23}{12} - \frac{3}{2}\ln 2 > \frac{5}{6}$, 得证.

二. 数列放缩的常用手段

1. 数列放缩手段的证明方法

数列放缩手段 在数列放缩时, 使用的不等关系 (不等式), 例如: 基本不等式、指对不等式等; 而对放缩手段的证明, 一般采用三种方法: 数学归纳法, 反证法, 函数证明法.

数学归纳法

一般地, 证明一个与正整数 n 有关的命题, 可按下述步骤进行:

第一步 (归纳奠基): 证明当 $n = n_0$ ($n_0 \in \mathbb{N}^*$) 时命题成立;

第二步 (归纳递推): 以“假设当 $n = k$ ($k \in \mathbb{N}, k \geq n_0$) 时命题成立”为条件, 推出“当 $n = k+1$ 时命题也成立”;

只要完成这两个步骤, 就可以断定命题对从 n_0 开始的所有正整数 n 都成立.

EXAMPLE 1 利用数学归纳法证明 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

STEP 1 归纳奠基 当 $n = 1$ 时, $1^2 = \frac{2 \cdot 3}{6}$ 成立.



PART 3 概率统计

CHAPTER 1

计数与逻辑推理

章节目标 CHAPTER OBJECTIVES

本章将带你从基础计数上升到组合结构分析，掌握解决复杂计数问题的核心“武器”。通过本章学习，你将达成以下目标：

构建模型化思维：从圆桌排列、错排等基础计数入手，学会识别题目背后的本质逻辑，将繁杂的计数问题转化为标准模型，通过“模型迁移”快速破题。

掌握存在性证明利器：深刻理解并灵活运用容斥原理、鸽巢原理，学会从“分布”的角度分析问题。你将具备从宏观视角审视离散数学结构的能力，轻松处理涉及“至少/至多”的存在性证明。

掌握结构转化技巧：学习反射法与卡特兰数的构造逻辑，攻克经典的路径与投票问题。理解Ferrer图如何通过直观的图形化语言，揭示看似深奥的整数拆分共轭关系。

掌握高阶计数工具：生成函数的领域通过直观的编码方式理解生成函数，你将学会利用生成函数的两类形态，将组合问题“算法化”，实现复杂计数的精准求和。

一. 基础计数

1. 圆桌排列

圆桌排列 指的是将 n 个不同的人（或物体）围成一圈排列，只考虑相对位置，不考虑整体旋转的情况。在普通排列中， n 个元素有 $n!$ 种线性排列方式。但在圆桌排列中，任意旋转都被视为同一种排列：

把整张桌子顺时针旋转1位，所有人相对位置不变；
所以对于每一种圆桌排列，有 n 种线性排列方式对应它。

因此，圆桌排列数为：

$$C_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

圆环排列 如果正向和反向（顺时针/逆时针）都被认为是同一种排列，则称为环形排列，是更强的对称性：

环形排列数 = $\frac{(n-1)!}{2}$ （仅适用于 $n \geq 3$ ）

有部分人不能相邻（限制条件） n 人围坐，要求 A 和 B 不相邻，问有多少种排列？

A 和 B 相邻的情况：将 A 、 B 视为“一个块” → 类似固定相邻问题
相邻方案数： $2(n-2)!$

所以不相邻方案数：

$$(n-1)! - 2(n-2)!$$

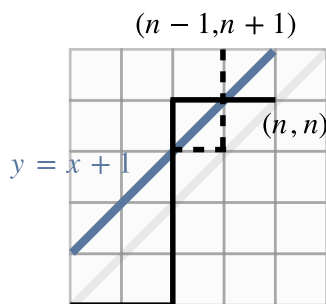
2. 错排 + 固定点组合问题

固定点 是指排列中某些元素仍然在原来的位置上。固定点组合问题就是：给定 n 个元素，求排列中恰好有 k 个固定点（其余位置错排）的排列数。换句话说，

恰好 k 个元素在原位，剩下的 $n-k$ 个元素需要完全错排

在 $n \times n$ 的点盘中, 从 $(0,0)$ 到 (n,n) 需要在 $2n$ 次移动中选择 n 次向右移动, 路径总数为 C_{2n}^n ;

反射法 下面, 我们再分析一下越过对角线 $y = x$ 的条数, 一旦越过对角线, 路径必然接触到 $y = x + 1$, 我们将第一个接触点后的路径关于 $y = x + 1$ 对称, 则终点为 $(n-1, n+1)$;



因此从 $(0,0)$ 到 $(n-1, n+1)$ 的路径总数等于从 $(0,0)$ 到 (n,n) 越过对角线 $y = x$ 的条数, 即 C_{2n}^{n-1} ; 故

$$Catalan_n = C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1} = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$$

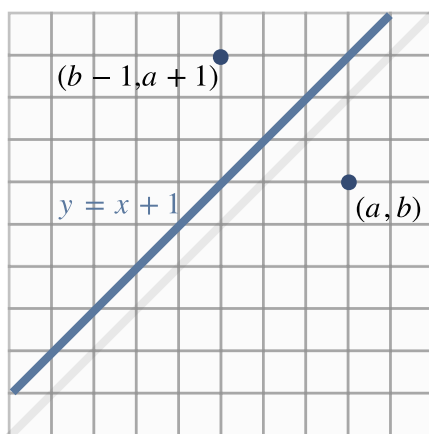
4. 随机投票问题与伯特兰投票问题

随机投票问题 设候选人A得到 a 票, 候选人B得到 b 票, 且 $a > b$, 这些票被随机排列 (即所有 C_{a+b}^a 种排列等可能), 问: 在整个计票过程中, A 的得票数始终不少于 B 的概率是多少?

我们先来看一个错误分析: 用路径模型来解释

- 向右走一步代表A得一票
- 向上走一步代表B得一票
- 初始点为 $(0,0)$, 终点为 (a,b)

要求“整个过程中 A 始终不落后于 B”对应于路径始终不高于 $y = x$, 利用反射法:



路径数 = $(0,0)$ 到 (a,b) 的总路径数 - $(0,0)$ 到 $(b-1, a+1)$ 的路径数

即为 $C_{a+b}^a - C_{a+b}^{b-1}$, A 的得票数始终不少于 B 的概率即

$$P = \frac{C_{a+b}^a - C_{a+b}^{b-1}}{C_{a+b}^a} = \frac{a+1-b}{a+1}$$

伯特兰投票问题 设候选人A得到 a 票, 候选人B得到 b 票, 且 $a > b$, 这些票被随机排列 (即所有 C_{a+b}^a 种排列等可能), 问: 在整个计票过程中, A 的得票数始终大于 B 的概率是多少?

这个问题可以同 **随机投票问题** 一样用路径模型来解释:

- 向右走一步代表A得一票

- 向上走一步代表B得一票
- 由于初始点(0,0)本身矛盾，故应选取(1,0)作为起点，终点为(a,b)

唯一区别是要求“整个过程中 A始终领先于B”对应于路径始终不高于 $y = x$ ，利用反射法：

路径数 = (1,0)到(a,b)的总路径数 - (1,0)到(b,a)的路径数

即为 $C_{a+b}^a - C_{a+b}^{b-1}$ ，A的得票数始终不少于B的概率即

$$P = \frac{C_{a+b-1}^{a-1} - C_{a+b-1}^{b-1}}{C_{a+b}^a} = \frac{a-b}{a+b}$$

EXAMPLE 姐姐和妹妹一起洗 5 个互不相同的碗，姐姐洗好的碗一个一个往上摞，妹妹再从最上面一个一个地拿走放入碗柜擦成一摞。姐姐一边洗，妹妹一边拿，那么妹妹擦好的碗一共有多少种不同的擦法？

解析 这道题可以抽象为一个栈的压入与弹出序列问题，规则是，任何时刻擦掉（弹出）的碗不能多于洗好的碗（压入的个数），这个问题正是卡特兰数的经典模型，表示有多少种合法的出栈序列：

$$Catalan_5 = \frac{1}{5+1} C_{10}^5 = 42 \text{种}$$

5. Ferrer图与整数拆分共轭性

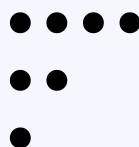
整数拆分 将整数 n 拆分为恰好 k 个部分的拆分方案数记为

$$P_k(n)$$

不考虑顺序，比如 5 拆分为 (1,1,3) (3,1,1) (1,3,1) 都同属一种方案。

费雷尔图 (Ferrers Diagram) 即用一组按行排列的点来表示一个拆分。每一行点的数量对应拆分中的一个加数，通常我们将行数按从大到小排列。

例如 整数 $n = 7$ 的一种拆分方式是 $4 + 2 + 1$ ，对应的费雷尔图如下：



拆分共轭性 将整数 n 拆分为恰好 k 个部分的拆分方案数 = 将整数 n 拆分为每部分最大为 k 的拆分方案数

证明 通过费雷尔图，我们将代数问题转换为几何问题：

以 $n = 7, k = 3$ 为例，例如： $4 + 2 + 1 = 7$ 。

CASE 1 我们要找所有 $n = 7$ 拆成 3 行的方案，用费雷尔图表示为：



所有将 n 拆成 k 行的图形。由于每行至少有 1 个点，所以必然有 k 行。

CASE 2 我们沿着主对角线翻转，我们将“行数（部分数）”变成了“列数（最大值）”。



原本图形有 3 行，现在图形的最长行（最大值）变成了 3。

所有最大行长度为 k 的图形。即图形的第一行（最长行）正好有 k 个点。

底层逻辑

如果你有一个拆分，它有 k 个部分（ k 行），那么当你把它转置后，它的第一行必然会有 k 个点（即最大部分为 k ）

反之，如果你有一个拆分，其最大部分为 k （第一行有 k 个点），转置后它必然有 k 行（即分成了 k 个部分）

这个操作是 可逆 的（转置两次回到原图），所以两个集合的大小必须相等。

三. 生成函数

生成函数 简单来说，它的核心思想是：把一个复杂的离散数列 $\{a_n\}$ 变成一个代数函数 $f(x)$ ，通过对函数进行代数运算，再通过展开系数还原回数列。

你可以把它理解为一种“编码”技术，把数列里的信息都塞进多项式的系数里，利用代数规律帮我们完成本来极其繁琐的加减乘除。

1. 直观理解—编码

假设我们有一个数列 $\{a_n\} = a_0, a_1, a_2, \dots$ ，我们将它写成一个幂级数（或多项式）：

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$

这里的 x 并没有实际数值含义，它只是一个“占位符”，负责告诉我们每一项对应的下标是多少。

如果你想求两个数列的“和”或“卷积”（比如在排列组合中，把两组物体合在一起计数），直接硬算往往很乱。但用生成函数：

相加：两个序列相加，对应多项式相加。

卷积：如果我们要算 $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ （这在计数中非常常见，代表分配问题的某种组合方式），在生成函数中，这仅仅对应两个函数的乘积： $f(x) \cdot g(x) = (\sum a_n x^n) \cdot (\sum b_n x^n) = \sum c_n x^n$ ，系数 c_n 就是我们答案。

EXAMPLE 1 拆分正整数 用 1 元、2 元、5 元的硬币凑出 n 元钱，有多少种组合方法？

1 元硬币的组合：可以取 0 个、1 个、2 个... 对应多项式 $(1 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots)$

2 元硬币的组合：可以取 0 个、2 元、4 元... 对应多项式 $(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots)$

5 元硬币的组合：对应多项式 $(1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \dots)$

只需要把这三个式子乘起来：

$$f(x) = (1 + x + x^2 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x^5 + x^{10} + \dots)$$

展开后， x^n 前面的系数就是凑出 n 元钱的方案数。

它把“计数”变成了“代数计算”：原本你需要考虑各种复杂的分类讨论，现在只需要做多项式乘法或取导数。

它能解决递推：很多递推数列（如斐波那契）可以直接通过生成函数导出通项公式，不用再去解特征方程。

EXAMPLE 2 $x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 3x_6 = 15$ 的正整数解有多少个？

CHAPTER 2

动态规划

一. 动态规划的定义

动态规划 (Dynamic Programming, DP) 是一种算法设计思想, 适用于解决具有重叠子问题和最优子结构性质的问题。它的核心思想是将问题分解为多个子问题, 利用已经求解的子问题的解来构建更大问题的解, 从而减少重复计算, 提高效率。

动态规划的基本步骤可以概括为以下几点:

STEP 1 定义状态

状态是动态规划的核心。你需要通过分析问题, 找到一种合适的方式来描述当前问题的一个子问题。通常来说, 题目问什么, 就定义什么为状态。

STEP 2 状态转移方程

状态转移方程是动态规划的关键所在, 它描述了如何根据之前的状态, 得到当前状态的解。状态转移方程通常是递归的, 比如斐波那契数列的状态转移方程:

$$dp[i] = dp[i-1] + dp[i-2]$$

STEP 3 初始化和边界条件

初始化是确定动态规划的边界条件。通常是在问题的最小子问题上直接设定已知解。例如, 在斐波那契数列中, 可以设定 $dp[0] = 0$ 和 $dp[1] = 1$ 。

STEP 4 计算结果

通过从初始状态出发, 不断根据状态转移方程递推, 直到得出最终所需的解。

EXAMPLE 1 假设你正在爬楼梯。需要 n 阶你才能到达楼顶。每次你可以爬 1 或 2 个台阶。你有多少种不同的方法可以爬到楼顶呢?

STEP 1 定义状态 设 $dp[i]$ 表示到达第 i 个台阶的方法数。

STEP 2 状态转移方程

从第 $i-1$ 个台阶跳 1 步到达第 i 个台阶。

从第 $i-2$ 个台阶跳 2 步到达第 i 个台阶。

因此, 状态转移方程为:

$$dp[i] = dp[i-1] + dp[i-2]$$

STEP 3 初始化

$dp[1] = 1$: 表示到第 1 个台阶的方法数为 1。

$dp[2] = 2$: 表示到第 1 个台阶的方法数为 2。

STEP 4 计算结果 通过循环计算从 3 到 n 的所有台阶的方法数, 最后返回 $dp[n]$ 。

例如, 当 $n = 5$ 时:

$$dp[3] = 1 + 2 = 3, dp[4] = 2 + 3 = 5, dp[5] = 3 + 5 = 8$$

故共 8 种方法。

STEP 2 状态转移方程 对于每个位置 (i, j) ，它的路径总数等于从上方 $(i-1, j)$ 和左方 $(i, j-1)$ 两个方向来的路径数之和，即：

$$dp[i][j] = dp[i-1][j] + dp[i][j-1]$$

计算完所有的 dp 值后，右下角的 $dp[m-1][n-1]$ 就是从左上角到右下角的路径总数。

思路2 机器人从左上角到右下角总共需要移动 $m-1$ 次向下和 $n-1$ 次向右，因此总共需要移动 $m+n-2$ 次。其中选择 $m-1$ 次向下或 $n-1$ 次向右的组合数就是路径的总数。路径总数为：

$$C_{m+n-2}^{m-1} = \frac{(m+n-2)!}{(m-1)! \times (n-1)!}$$

二. 马尔科夫链的动态规划

马尔可夫链 (Markov Chain) 用于描述一个系统在不同状态之间的转移过程。它的关键特点是“无记忆性”，也就是说，系统未来的状态只依赖于当前状态，而与之前的状态无关。这种特点在条件概率的框架下很好地体现出来。

1. 马尔可夫链的基本概念

假设我们有一个系统，它可以处于多个不同的状态，比如说天气可以是“晴天”、“阴天”或“雨天”，每个状态都有可能转移到另一个状态。马尔可夫链的核心在于“转移概率”：从一个状态转移到另一个状态的概率。我们用条件概率来描述这种转移关系。

在条件概率的角度来看，马尔可夫链的特性可以总结为：

$$P(X_{n+1} = x | X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0) = P(X_{n+1} = x | X_n = x_n)$$

第 $n+1$ 时刻的状态 X_{n+1} 只依赖于当前时刻的状态 X_n ，而与之前的状态无关。这个性质被称为 **马尔可夫性**。

2. 马尔可夫链的递推模型

在马尔可夫链中，递推关系是核心概念之一，因为它让我们能够一步步计算出未来状态的概率分布。在不涉及复杂矩阵的前提下，我们可以用递推公式来理解马尔可夫链是如何从当前状态“推算”到下一状态的，即动态规划中的状态转移方程。

状态转移方程 假设一个马尔可夫链有多个状态 $S_1, S_2, \dots, S_k$ 。从当前状态到下一个状态的转移概率为 $P(S_j | S_i)$ ，表示系统从状态 S_i 转移到状态 S_j 的概率。假设在某一个时刻 n ，系统处于状态 S_i 的概率是 $P_n(S_i)$ 。我们想知道在下一时刻 $n+1$ 时，系统处于任意状态 S_j 的概率，这可以通过递推公式来计算：

$$P_{n+1}(S_j) = \sum_i P(S_j | S_i) \cdot P_n(S_i)$$

这个公式的含义是：在时刻 $n+1$ ，系统处于状态 S_j 的概率是从所有可能的状态 S_i 出发，以 $P(S_j | S_i)$ 的概率转移到 S_j 的总和。换句话说，所有可能状态对 S_j 的贡献都累加起来形成了递推关系。

EXAMPLE 1 甲、乙、丙、丁四个人做传球练习，球首先由甲传出，每个人得到球后都等概率地传给其余三个人之一，求经过 n 次传递后球回到甲手中的概率。

分析 设经过 n 次传递后球回到甲手中的概率为 $dp[n]$ ，若经过 n 次传递后球回到甲手中，则经过 $n-1$ 次传递后球不能回到甲手中，又乙、丙、丁地位等价，故经过 $n-1$ 次传递后球在乙、丙、丁手中的概率均为

$$\frac{1}{3}(1 - dp[n-1])$$

故 $dp[n] = \frac{1}{3}(1 - dp[n-1]) \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 = \frac{1}{3}(1 - dp[n-1])$ ，接着配凑等比数列即可得通项公式

$$dp[n] - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}(dp[n-1] - \frac{1}{4}), \quad dp[n] = \frac{1}{4}(1 - (-\frac{1}{3})^{n-1}).$$

其中, ξ_n 是独立随机变量, 取值为+1 (赢) 或-1 (输), 概率均为 $\frac{1}{2}$ 。

目标 赌徒通常有一个目标, 比如希望资金达到某个数额 b 就停止游戏, 或者当资金耗尽 (降到零) 时也会被迫退出。这样, 赌徒模型的一个常见问题是:

赌徒破产问题 设当赌徒手中有 a 元时 ($0 \leq a \leq b$), 最终输光的概率为 $P(a)$, 赌徒从资金 a 开始, 目标是探讨他最终是否会破产 (即资金归零), 或者达到目标金额 b 。

定义状态 当赌徒手中有 a 元时 ($0 \leq a \leq b$), 最终输光的概率为 $P(a)$

初始化 $P(0) = 1, P(b) = 0$

状态转移方程 当前资金为 a 时最终输光的概率 $P(a)$ 等于下一步资金增加1元后输光的概率或减少1元后输光的概率加权之和, 即

$$P(a) = \frac{1}{2}P(a+1) + \frac{1}{2}P(a-1)$$

求解递推公式 为了解决上述递推方程, 我们可以考虑齐次线性差分方程的解法。对于对称随机游走 (即赢和输的概率相等), 可以证明 $P(a)$ 的解为线性函数:

$$P(a) = \frac{b-a}{b}$$

这个公式表明, 赌徒的初始资金 a 越少, 他最终破产的概率越大; 相反, 初始资金越接近目标金额 b , 他破产的概率越小。具体而言, 如果赌徒从 $a = 0$ 开始, 那么他必然破产 (概率为 1); 如果他从 $a = b$ 开始, 他不可能破产 (概率为 0); 而当赌徒想赚钱的欲望趋近于无穷大, 想赚特别特别多的钱, 即 $b \rightarrow \infty$ 时, $P(a) \rightarrow 1$, 说明赌徒会输光。

预期游戏轮数 另一个关心的问题是赌徒最终达到 b 或破产所需的游戏轮数。可以证明, 在公平游戏下, 若 b 是目标金额, 预期轮数为 $E(T)$, 则

$$E(T) = 1 + \frac{1}{2}E(T+1) + \frac{1}{2}E(T-1)$$

根据差分方程可以解得:

$$E(T) = a(b-a)$$

这表明资金差额越大, 赌徒需要的平均轮数越多。即便公平情况下, 达到目标可能需要非常多的轮数。

四. 非对称随机游走的动态规划

非对称随机游走 (Asymmetric Random Walk) 是指在随机游走过程中, 步伐的方向具有一定的不对称性, 即向前和向后的步伐概率不同。

假设我们在一维空间中进行非对称随机游走, 定义状态为 X_t , 其中 X_t 表示在时间 t 时刻的位置。每次步伐的变化量 ΔX_t 可以取两个可能的值:

+1 (前进) 概率为 p ;

-1 (后退) 概率为 $1-p$, 其中 $p \neq 0.5$, 即非对称。

在这种情况下, 随机游走的递推关系可以表示为:

$$X_{t+1} = X_t + \Delta X_t$$

其中, ΔX_t 是一个随机变量, 它可以取值+1或-1, 分别对应前进和后退。

偏移现象 非对称随机游走常常用来模拟有方向性、偏移的过程, 例如股市价格变动中多头或空头市场的趋势。

非平衡态 由于步伐的概率不相等, 非对称随机游走往往会偏向某一方向, 从而形成持久的非平衡态。

EXAMPLE 元素 $\{1,2,3\}$ 排成 1 个有序环：我们要数的是有几个不同的循环排列。可能的有序环有两种：

$(1\ 2\ 3)$ 和 $(1\ 3\ 2)$

为什么不是 $3! = 6$ 种呢？因为 $(1\ 2\ 3)$ 、 $(2\ 3\ 1)$ 、 $(3\ 1\ 2)$ 其实是同一个环的不同写法（循环等价），只算一次。

由动态规划得到的 **第一类斯特林数递推公式**

$$c(n, k) = (n-1)c(n-1, k) + c(n-1, k-1)$$

第 n 个元素插入已有 k 个环中某个位置：有 $(n-1)$ 种插入方式 → **第一项**

第 n 个元素单独成一个新环：等价于对 $n-1$ 个元素分成 $k-1$ 个环 → **第二项**

错排 vs. 第一类斯特林数 错排实际上与第一类斯特林数密切相关，因为：

第一类斯特林数 $c(n, k)$ 计数的是将 n 个元素分成 k 个非空有序环（即排列的循环结构）

$$c(n, k) = (n-1)c(n-1, k) + c(n-1, k-1)$$

而错排是所有元素都不在原位的排列

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) \Rightarrow D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

故可以理解为：

从所有排列中，筛去固定点（即单元素环），剩下的全是没有长度为1的环的排列。

所以错排数就是：所有不包含1长度循环的排列数

于是我们可以写出一个重要的表达：

$$D_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot c(n, k)$$

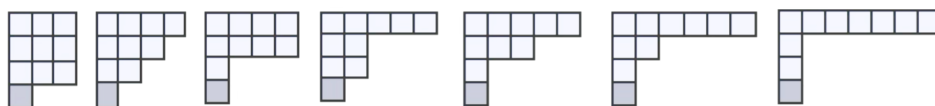
七. 整数拆分的动态规划

在前文我们已经讲了整数拆分的共轭性，但其实其方案数还可以利用动态规划的思想来写出递推方程：

公式逻辑 以 $P_4(10)$ 为例，按照如下分组

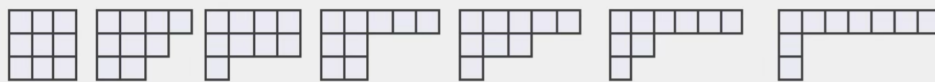
GROUP 1

拥有大小为1的组



删掉大小为1的组后

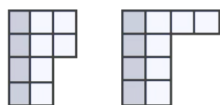
等价于 $P_3(9)$



$$P_{k-1}(n-1)$$

GROUP 2

没有大小为1的组



删掉第一列后

等价于 $P_4(6)$



$$P_k(n-k)$$

递推公式 即将 n 分为 k 组等价于两个组成部分的集合，即“将 $n-1$ 分成 $k-1$ 组”和“将 $n-k$ 分成 k 组”，故

CHAPTER 3

概率与期望

一. 概率与期望的统一性

简单来说，概率描述的是“事件发生的可能性”，而期望描述的是“随机变量的平均趋势”。

这种统一性可以通过以下几个维度来深入理解：

1. 期望的本质：概率的加权平均

期望 $E[X]$ 是随机变量 X 所有可能取值的加权平均，其权重正是对应的概率。

对于离散型随机变量：

$$E[X] = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

对于连续型随机变量：

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

在这里，概率分布（概率质量函数或概率密度函数）充当了将随机变量的值“映射”到其长期平均值的“分配者”。

2. 期望与概率的代数关系：指示函数

这是理解概率与期望统一性的关键，任何事件 A 的概率，都可以看作是事件的指示变量 I_A 的期望值。

定义指示变量：若事件 A 发生， $I_A = 1$ ；若不发生， $I_A = 0$ 。

根据期望的定义：

$$E[I_A] = 1 \cdot P(A) + 0 \cdot P(A^c) = P(A)$$

这意味着概率只是期望的一个特例。通过这种转换，我们可以利用期望的线性性质来处理复杂的概率计算问题，具体内容我们将在下文讲解。

3. 大数定律

大数定律 (Law of Large Numbers) 是连接理论概率与期望的桥梁。它指出，随着试验次数 n 的增加，样本平均值（频率）会以概率 1 收敛于随机变量的期望值（理论平均值）。

频率视角（概率） 随机事件的频率 $\frac{n_A}{n}$ 会稳定在 $P(A)$ 。

均值视角（期望） 样本均值 $\frac{1}{n} \sum X_i$ 会稳定在 $E[X]$ 。这就是为什么我们可以通过统计频率来估计概率，也可以通过统计样本均值来估计期望。

概率与期望的 **统一性** 在于：

定义上的包含关系 概率是特定随机变量的期望，期望是对所有概率分布的加权求和。

线性性质的共享 两者都遵循线性性质， $E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$ 。这一性质使得我们在计算复杂随机过程时，可以将整体分解为若干简单事件的概率和，从而通过期望轻松求解。

二. 期望线性

对于一组随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ ，它们的期望之和等于它们总和的期望：

$$E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$$

注意 变量之间不需要独立，这也是线性期望的强大之处。

如果你可以把复杂的总量 x 拆成几个简单变量的和，那么就可以逐个求期望再加总，不需要考虑它们之间的相关性。

相关的，在一轮中我们讲到过

$$E(ax + b) = aE(x) + b$$

三. 对称性原理与期望线性

处理大规模、多变量的计数或期望问题时，核心瓶颈往往在于状态空间的爆炸，此时，我们可以通过 **拆解对象** 与 **利用对称性**，将复杂的全局问题转化为若干个简单的局部期望问题。

对称性原理 在许多组合模型中，对象之间存在等价性。即如果系统内的一组元素在物理或逻辑规则下是不可区分的，则每一个个体对全局期望的贡献必然相等。即若 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 具有统计对称性，则

$$E[X_1] = E[X_2] = \dots = E[X_n] = a$$

根据期望线性，此时总期望 $E(x)$ ：

$$E(x) = a \cdot n$$

EXAMPLE 1 甲中有2个黑球、1白球，乙中有3个白球，现从甲、乙中各任取一个球交换，重复 n 次。记 n 次交换后甲中黑球的个数为 X_n ，求 X_n 的分布列及其期望 $E(X_n)$ 。

STEP 1 对称性拆解

将甲中的黑球标记为 B_1, B_2 。显然， B_1 和 B_2 在交换规则下地位完全等价。故我们可以记重复 n 次后， B_1, B_2 出现在甲中的期望为

$$E(B_1) = E(B_2) = P_n$$

P_n 即重复 n 次后， B_1/B_2 在甲中的概率；故

$$E(X_n) = E(B_1) + E(B_2) = 2P_n$$

STEP 2 单体状态的递推

考虑第 $n+1$ 次交换后 B_1 在甲的概率：

若 B_1 原在甲（概率 p_n ）：被选中的概率为 $1/3$ （换走），留下概率为 $2/3$

若 B_1 原在乙（概率 $1-p_n$ ）：被选回甲的概率为 $1/3$ （乙中随机取出一个球恰好是 B_1 ）

递推方程为： $p_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}(1-p_n) = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}$ ，从而得到 $p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$$E[X_n] = 2 \times p_n = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

EXAMPLE 2 将 $1, 2, \dots, n$ 这 n 个数字进行随机排列，记排列中“不动点”的个数为 X （即满足 $P_i = i$ 的位置个数），求 X 的数学期望 $E[X]$ 。

STEP 1 利用对称性

“数字 i 刚好落在第 i 个位置”的期望为

2. 结合线性期望

很多时候，我们想求“满足某种条件的方案总数”。如果我们定义一个指示变量 I_i ：

当方案 i 满足条件时 $I_i = 1$ ，否则 $I_i = 0$

那么，满足条件的方案总数 $S = \sum I_i$ ；其期望

$$E[S] = \sum E[I_i] = \sum P(\text{方案 } i \text{ 满足条件})$$

转化思维：将“求总数”转化为“求每个小事件发生的概率之和”。

EXAMPLE 1 (2025·新课标I卷) 一个箱子里有5个球，分别以1~5标号，若有放回取三次，记至少取出一次的球的个数为 X ，则 $E(X) =$ _____.

STEP 1 定义指示变量

我们定义 I_k 表示第 k 个球是否出现过：

$$I_k = \begin{cases} 1 & \text{如果球 } k \text{ 在3次抽取中至少出现过一次} \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

显然， X 就是这5个指标变量之和：

$$X = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5$$

STEP 2 利用期望的线性

$$E(X) = E(I_1) + E(I_2) + E(I_3) + E(I_4) + E(I_5)$$

这就转化为：计算每个球在3次抽取中至少出现一次的概率。由于抽球是均匀独立随机，每个球被抽到的概率是一样的，所以：

$$E(I_k) = P(\text{第 } k \text{ 个球至少出现一次})$$

STEP 3 计算单个球出现的概率

$$P(\text{球 } k \text{ 从未出现}) = \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125}$$

因此，球 k 至少出现一次的概率为：

$$E(I_k) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^3 = 1 - \frac{64}{125} = \frac{61}{125}$$

STEP 4 求 $E(X)$

因为每个球独立，且都有相同的出现概率，所以： $E(X) = 5 \cdot \frac{61}{125} = \frac{61}{25}$.

EXAMPLE 2 从 n 个编号纸条中有放回地抽 k 次，求最终被抽到过至少一次的纸条编号的个数的期望值.

STEP 1 定义指示变量

令 $I_i = 1$ 表示编号 i 至少被抽到一次；否则 $I_i = 0$

STEP 2 利用期望的线性

记 X 表示“最终被抽到过至少一次的纸条编号的个数”，则

$$X = \sum_{i=1}^n I_i$$

$E(X)$ 即为所求



PART 4 圆锥曲线

CHAPTER 5

定点调整与斜率调整

章节目标 CHAPTER OBJECTIVES

本章聚焦于解析几何中处理直线过定点、定值及对称性问题的核心技巧——“调整法”。我们将深入剖析第三定义的推广形式以及定点弦的调整连等式，系统掌握斜率调整法与定点调整法的底层逻辑，并针对轴点与非轴点的对称、非对称情形进行分类突破。

学习本章后，你需要能够：

1. 构建斜率调整的思维模型：理解从第三定义到一般化斜率调整的过程，掌握单次与多次斜率调整的构造方法，并能将其与齐次化联立相结合，快速解决涉及斜率关系的复杂问题。
2. 运用定点调整法处理弦问题：熟练掌握定点调整原理及连等式推导，学会定点调整的对称与非对称处理方法，解决复杂多样由定点产生的定点定值问题
3. 清晰区分两种调整法的适用场景与本质差异。

处理定点定值问题，核心在于寻找几何结构的代数平衡，建议熟练掌握调整法：在“圆锥曲线上两定一动”条件下用斜率调整，在“圆锥曲线上定点弦”条件下用定点调整，将隐蔽的几何约束转化为可计算的对称代数结构，这是破解此类压轴题的通法。

一. 第三定义的推广与斜率调整原理

1. 调整法前置基础

等比定理 若 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，则

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d} \quad (\text{分母默认非零})$$

等比定理的推广 若 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ ，则

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n}{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i} \quad (\text{分母默认非零})$$

2. 第三定义的推广

第三定义的适用性分析 对于椭圆或双曲线而言，传统的 第三定义 仅适用于曲线上一动点 P 与关于曲线中心对称的两点 A 、 B 连线的斜率关系，若 A 与 B 不具备关于 曲线中心对称性，则第三定义不再适用。

但从射影原理上讲， k_{PA} 与 k_{PB} 的关系由曲线本身决定，连接后的斜率关系依然存在

故此要想找到 k_{PA} 与 k_{PB} 的斜率关系，就必须先将第三定义进行推广：

示例 已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ 上两点 $A(2,1)$ 与 $B(-2,1)$ ，一动点 $P(x,y)$ ，求 k_{PA} 与 k_{PB} 的关系。

结构分析 易得 $k_{PA} = \frac{y-1}{x-2}$ ， $k_{PB} = \frac{y-1}{x+2}$ ，二者含有相同结构 $y-1$ ，唯一的区别在于 $x-2$ 与 $x+2$ ；

通过点差法可得 $k_{PA} = \frac{y-1}{x-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{x+2}{y+1}$ ，此时在 k_{PA} 中就含有 k_{PB} 的部分结构 $x+2$ ；

倘若此时可以在 k_{PA} 中保持 $x+2$ ，并且在此基础上再构造出 $y-1$ ，就可以完全转化为 k_{PB} ：

STEP 1 点差法（第三定义） 又点差法可得 $k_{PA} = \frac{y-1}{x-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{x+2}{y+1}$

STEP 2 等比定理 利用等比定理，分子分母对应相加可得

$$k_{PA} = \frac{(y-1)-(x+2)}{(x-2)+2(y+1)}$$

STEP 3 结构调整 在分母上变形可得

$$k_{PA} = \frac{(y-1)-(x+2)}{(x+2)+2(y-1)}$$

STEP 4 转化斜率 分子分母同除 $x+2$ ，可得 $k_{PA} = \frac{\frac{y-1}{x+2}-1}{2\frac{y-1}{x+2}+1} = \frac{k_{PB}-1}{2k_{PB}+1}$

如此一来就从 k_{PA} 出发，通过点差法并借助等比定理构造出 k_{PB} ，这样就做到了第三定义的推广。

分析问题时应避免单向思维，以防陷入 **充分而不必要** 的逻辑局限，为确保结论的充要性，必须进行逆向验证

示例的反向 已知两定点 $A(2,1)$ 与 $B(-2,1)$ ，一动点 $P(x,y)$ ，满足 $k_{PA} = \frac{k_{PB}-1}{2k_{PB}+1}$ ，求 P 的轨迹。

分析 代入斜率关系可得 $\frac{y-1}{x-2} = \frac{\frac{y-1}{x+2}-1}{2\frac{y-1}{x+2}+1} = \frac{y-x-3}{x+2y}$ ，交叉相乘可得

$$xy + 2y^2 - x - 2y = xy - x^2 - 3x - 2y + 2x + 6$$

化简得 $x^2 + 2y^2 = 6$ ，即为**示例**中的椭圆 Γ 。

由反向典例可得该斜率关系完全可以代替原来的第三定义来生成圆锥曲线。

换言之，他们是等价的： $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1 \Leftrightarrow \frac{y-1}{x-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{x+2}{y+1} = \frac{(y-1)-(x+2)}{(x-2)+2(y+1)}$

3. 斜率调整法原理与适用条件

斜率调整法原理 在圆锥曲线上，通过对 **某一斜率** 使用点差法展开，并用等比定理得到新的表达式

$$k = \frac{y-1}{x-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{x+2}{y+1} = \frac{(y-1)-(x+2)}{(x-2)+2(y+1)}$$

整个斜率的链式表达称为**斜率调整连等式**，而新表达式的构造过程称为**斜率调整**。

构造范围分析 已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上一定点 $A(x_0, y_0)$ ，椭圆上任意动点 $P(x, y)$ ，则有

$$k_{AP} = \frac{y-y_0}{x-x_0} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x+x_0}{y+y_0} = \frac{\lambda(y-y_0)-\mu b^2(x+x_0)}{\lambda(x-x_0)+\mu a^2(y+y_0)}$$

分析 假设 $B(m, n)$ ， k_{AP} 可以变为 k_{BP} ，即与 $\frac{y-n}{x-m}$ 有关的斜率，那么必须满足

$$\begin{cases} \lambda(y-y_0)-\mu b^2(x+x_0) = \lambda(y-n)-\mu b^2(x-m) \\ \lambda(x-x_0)+\mu a^2(y+y_0) = \lambda(x-m)+\mu a^2(y-n) \end{cases}$$

化简得 $\begin{cases} \mu b^2(x_0+m) = \lambda(n-y_0) \\ \lambda(x_0-m) = \mu a^2(n+y_0) \end{cases}$ ，相乘可得 $\lambda\mu a^2 b^2 (\frac{x_0^2-m^2}{a^2} + \frac{y_0^2-n^2}{b^2}) = \lambda\mu a^2 b^2 (1 - \frac{m^2}{a^2} - \frac{n^2}{b^2}) = 0$ ，

又 $\lambda, \mu \neq 0$ ，则 $\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} = 1$ ，意味着点 $B(m, n)$ 同样在椭圆 Γ 上，则那么 k_{BP} 是椭圆 Γ 上的两点连线斜率。

斜率调整法的适用条件 从**示例**以及构造分析可以归纳出斜率调整的适用条件

圆锥曲线 Γ 上两定点 A 和 B 与一动点 P

简单来讲, 通过点差法将 k_{PA} 展开, 并借助等比定理改造, 转化到 k_{PB} 上, 最终得到 k_{PA} 与 k_{PB} 的斜率关系.

记号补充 为了方便叙述, 沿用系数调整的记号, 用 $\stackrel{(c,d)}{=}_{(a,b)}$ 表示调整准确分配的系数, 例如用在示例中

$$k_{PA} = \frac{y-1}{x-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{x+2}{y+1} = \frac{(y-1)-(x+2)}{(x-2)+2(y+1)} = \frac{(y-1)-(x+2)}{(x+2)+2(y-1)} = \frac{k_{PB}-1}{2k_{PB}+1}$$

用 $\stackrel{(1,-1)}{=}_{(1,2)}$ 省去过程中的 $\frac{(y-1)-(x+2)}{(x-2)+2(y+1)}$, 直接得到 $\frac{(y-1)-(x+2)}{(x+2)+2(y-1)}$, 即

$$k_{PA} = \frac{y-1}{x-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{x+2}{y+1} \stackrel{(1,-1)}{=}_{(1,2)} \frac{(y-1)-(x+2)}{(x+2)+2(y-1)} = \frac{k_{PB}-1}{2k_{PB}+1}$$

4. 斜率调整的一般构造与结论

椭圆结论 已知椭圆 $\Gamma_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上两定点 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$, 一动点 $P(x, y)$, 记 $k_{PA} = k_1$, $k_{PB} = k_2$, 则

$$k_1 = \frac{\lambda k_2 - b^2}{a^2 k_2 + \lambda}, \text{ 其中 } \lambda = b^2 \frac{x_2 + x_1}{y_2 - y_1} = -a^2 \cdot \frac{y_2 + y_1}{x_2 - x_1}$$

推导 由斜率调整法

$$k_1 = \frac{y-y_1}{x-x_1} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x+x_1}{y+y_1} \stackrel{(\lambda, -b^2)}{=}_{(\lambda, a^2)} \frac{\lambda(y-y_1) - b^2(x+x_1)}{\lambda(x-x_1) + a^2(y+y_1)}$$

构造目标: $k_2 = \frac{y-y_2}{x-x_2}$, 则需要满足

$$\begin{cases} \lambda(y-y_1) - b^2(x+x_1) = \lambda(y-y_2) - b^2(x-x_2) \\ \lambda(x-x_1) + a^2(y+y_1) = \lambda(x-x_2) + a^2(y-y_2) \end{cases}$$

解得 $\lambda = b^2 \frac{x_2 + x_1}{y_2 - y_1} = -a^2 \cdot \frac{y_2 + y_1}{x_2 - x_1}$, 代入可得 $k_1 = \frac{\lambda(y-y_2) - b^2(x-x_2)}{\lambda(x-x_2) + a^2(y-y_2)} = \frac{\lambda k_2 - b^2}{a^2 k_2 + \lambda}$

抛物线结论 已知抛物线 $\Gamma_2: y^2 = 2px$ 上两定点 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$, 一动点 $P(x, y)$, 记 $k_{PA} = k_1$, $k_{PB} = k_2$, 则

$$k_1 = \frac{\lambda k_2}{k_2 + \lambda}, \text{ 其中 } \lambda = \frac{2p}{y_1 - y_2} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 - x_2}$$

推导 由斜率调整法

$$k_1 = \frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{2p}{y+y_1} \stackrel{(\lambda, 1)}{=}_{(\lambda, 1)} \frac{\lambda(y-y_1) + 2p}{\lambda(x-x_1) + y+y_1}$$

构造目标: $k_2 = \frac{y-y_2}{x-x_2}$, 则需要满足

$$\begin{cases} \lambda(y-y_1) + 2p = \lambda(y-y_2) \\ \lambda(x-x_1) + y+y_1 = \lambda(x-x_2) + y-y_2 \end{cases}$$

解得 $\lambda = \frac{2p}{y_1 - y_2} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 - x_2}$, 代入可得 $k_1 = \frac{\lambda k_2}{k_2 + \lambda}$

5. 图示化理解斜率调整的构造

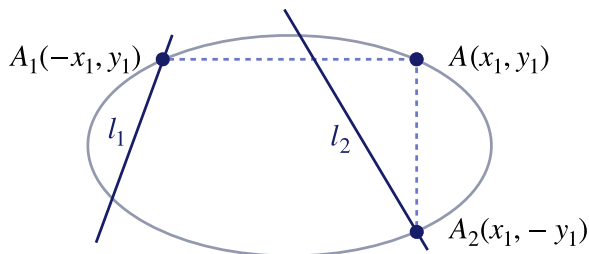
在椭圆结论的推导中, 斜率调整连等式为

$$k_1 = \frac{y-y_1}{x-x_1} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x+x_1}{y+y_1} \stackrel{(\lambda, -b^2)}{=}_{(\lambda, a^2)} \frac{\lambda(y-y_1) - b^2(x+x_1)}{\lambda(x-x_1) + a^2(y+y_1)}$$

STEP 1 作目标结构的直线化 将构造部分的分子、分母分别看作直线, 可得

$$l_1: \lambda(y-y_1) - b^2(x+x_1) = 0, \quad l_2: \lambda(x-x_1) + a^2(y+y_1) = 0$$

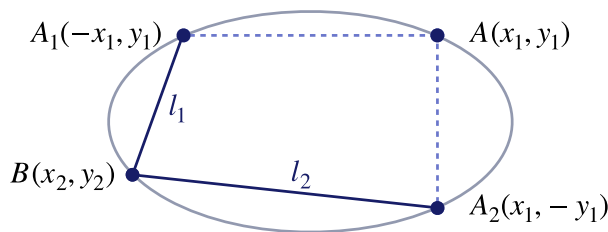
STEP 2 观察几何性质 不难发现, 无论 λ 取何值, 直线 l_1 过 $A_1(-x_1, y_1)$, 直线 l_2 过 $A_2(x_1, -y_1)$



STEP 3 剖析结构成因 从代数形式上看 l_1 和 l_2 的表达式天然包含了“过定点”的结构特征, 即

$$A(x-m) + B(y-n) = 0 \Leftrightarrow \text{过定点}(m, n)$$

STEP 4 应用构造特征 若要构造出目标斜率 $k_2 = \frac{y-y_2}{x-x_2}$, 方程中必须引入含有 $A(x-x_2) + B(y-y_2)$ 的结构, 则 l_1 和 l_2 都过点 $B(x_2, y_2)$



STEP 5 解出调整系数 将点 $B(x_2, y_2)$ 分别代入 l_1 、 l_2 可得

$$\lambda(y_2 - y_1) - b^2(x_2 + x_1) = 0, \quad \lambda(x_2 - x_1) + a^2(y_2 + y_1) = 0$$

$$\text{解得 } \lambda = b^2 \cdot \frac{x_2 + x_1}{y_2 - y_1} = -a^2 \cdot \frac{y_1 + y_2}{x_2 - x_1}.$$

λ 的解唯一, 且具有两个表达形式, 本质上就是第三定义的变形, 刚好与 BA_1 、 BA_2 的斜率相关.

二. 斜率调整的应用

1. 单次斜率调整

只需要一次斜率调整, 即可解决问题, 常见用于处理单动点问题, 主要以

圆锥曲线上两定点、一动点求两斜率关系

的形式出现, 主要有两种例题:

借助斜率关系证明定值 计算目标可以借助斜率调整变成单变量, 或由斜率关系结论等价变形而来

EXAMPLE 1 (2016·北京文) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 过点 $A(2, 0)$, $B(0, 1)$ 两点.

(1) 求椭圆 C 的方程及离心率;

(2) 设 P 为第三象限内一点且在椭圆 C 上, 直线 PA 与 y 轴交于点 M , 直线 PB 与 x 轴交于点 N , 求证: 四边形 $ABNM$ 的面积为定值.

分析 目标 $S_{ABNM} = \frac{1}{2} \cdot |AN| \cdot |BM| = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{2k_2 + 1}{k_2} \right| \cdot |2k_1 + 1|$, 全部换成 k_2 或 k_1 即可, 利用斜率调整建立两斜率关系即可; 在连等式中待定

$$k_1 = \frac{y}{x-2} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{x+2}{y} \xrightarrow[(\lambda, 4)]{(\lambda, -1)} \frac{\lambda y - (x+2)}{\lambda(x-2) + 4y}$$

要构造 $k_2 = \frac{y-1}{x}$, 则需出现 $Ax + B(y-1)$, 即过 $(0, 1)$, 代入分子或分母令其=0, 可解出 $\lambda = 2$.

定点调整 圆锥曲线的定点弦 定比点差法 以定点弦为基础进行构造，旨在构造出特定的代数结构，以符合特定问题的处理

四. 轴点的对称、非对称调整

以椭圆标准方程为例，当定点 $P(x_0, y_0)$ 位于 x 轴上时，定点调整连等式可变为

$$-\lambda = \frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0} = -\frac{x_1 - \frac{a^2}{x_0}}{x_2 - \frac{a^2}{x_0}}$$

根据定点调整连等式的使用不同，可以将轴点调整的调整方法分为两类：

分类	是否构造新表达式	说明
对称调整	无需再构造	所得结论具有直接对称性，针对斜率和等对称定值结论
非对称调整	需要构造特定结构	由构造特定结构导致结论没有直接对称性，针对过定点证明等

1. 轴点对称调整及相关结论

对称调整 通过在定点调整连等式中选取不同的等式，可将定点调整连等式转化为

具有直接对称性的结论

通过一个结论/多个结论组合，进而解决问题的调整方法为**对称调整**.

EXAMPLE 1 过点 $Q(1,0)$ 任意作直线 l （与 x 轴不垂直），设 l 与椭圆 $C: \frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ 交于 M 和 N 两点，与 y 轴交于点 R ，若 $\overrightarrow{RM} = \lambda \overrightarrow{MQ}$ ， $\overrightarrow{RN} = \mu \overrightarrow{NQ}$ ，证明： $\lambda + \mu$ 为定值.

分析 设 $M(x_1, y_1)$ 和 $N(x_2, y_2)$ ，因为 $\overrightarrow{RM} = \lambda \overrightarrow{MQ}$ ， $\overrightarrow{RN} = \mu \overrightarrow{NQ}$ ，所以

$$\lambda + \mu = -\frac{x_1}{x_1 - 1} - \frac{x_2}{x_2 - 1} = -2 - \left(\frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2 - 1}\right)$$

再设 $\overrightarrow{MQ} = t \overrightarrow{QN}$ ，可得连等式 $-t = \frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1 - 1}{x_2 - 1} = -\frac{x_1 - 9}{x_2 - 9}$ ，则 $\frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2 - 1} = \frac{1}{4}$ ，代入得 $\lambda + \mu = -\frac{9}{4}$.

EXAMPLE 2 (2018·I卷) 设椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的右焦点为 F ，过点 F 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点，点 $M(2,0)$ ，设 O 为坐标原点，证明： $\angle OMA = \angle OMB$.

分析 设 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$ ， $\overrightarrow{AF} = \lambda \overrightarrow{FB}$ ，可得连等式

$$-\lambda = \frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1 - 1}{x_2 - 1} = -\frac{x_1 - 2}{x_2 - 2}$$

选取 $\frac{y_1}{y_2} = -\frac{x_1 - 2}{x_2 - 2}$ ，即 $\frac{y_1}{x_1 - 2} + \frac{y_2}{x_2 - 2} = 0$ ，故 $\angle OMA = \angle OMB$.

下面是常用的相关结论（以标准椭圆方程为例）：

$$\text{对称调整分式倒数和：} \frac{1}{x_1 - \frac{a^2}{x_0}} + \frac{1}{x_2 - \frac{a^2}{x_0}} = \frac{2}{x_0 - \frac{a^2}{x_0}}, \quad \frac{1}{x_1 - x_0} + \frac{1}{x_2 - x_0} = \frac{2}{\frac{a^2}{x_0} - x_0}$$

推导 选取 $\frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0} = -\frac{x_1 - \frac{a^2}{x_0}}{x_2 - \frac{a^2}{x_0}}$ ，交叉互换，可得 $\frac{x_1 - x_0}{x_1 - \frac{a^2}{x_0}} + \frac{x_2 - x_0}{x_2 - \frac{a^2}{x_0}} = 0$ ， $\frac{x_1 - \frac{a^2}{x_0}}{x_1 - x_0} + \frac{x_2 - \frac{a^2}{x_0}}{x_2 - x_0} = 0$ 分离常数可得

CHAPTER 6

仿新齐次化

章节目标 CHAPTER OBJECTIVES

在《一轮复习》中，平移齐次化是解决斜率类问题的最佳方法，如果只考虑曲线上的斜率计算，那么仿新齐次化将会是对齐次化使用的最优体现。

学习本章后，你需要能够：

1. 构建仿新齐次化的思维模型：深刻理解斜率替换原理、仿新齐次化原理，熟练运用补充斜率模型处理非标准形式。
2. 灵活运用三点型：掌握“顶点式”与“一般式”的推导过程及其适用场景，能够根据题目条件快速选择最优解法。
3. 多次齐次化的操作策略：在面对多重约束或复杂动点问题时，能够分步实施仿新齐次化，层层剥离几何条件，高效解决高难度的定点定值问题。

深入学习仿新齐次化，逐步构建斜率观体系，能够将复杂问题完全转化为斜率问题，以一法破万法。

一. 仿新齐次化原理

1. 斜率的二次函数与方程

核心分析 对于斜率类的问题，如果能构造出一个关于 k 的二次方程，就可以利用韦达定理直接求出

$$k_1 + k_2, k_1 k_2$$

因此，解决此类问题的关键在于构造关于 k 的二次方程。

斜率的二次函数 不妨反过来考虑，构造以 k 为变量的二次函数 $K(k)$ 满足

$$K(k) = (k - k_1)(k - k_2) = k^2 - (k_1 + k_2)k + k_1 k_2$$

易证明 $K(k_1) = K(k_2) = 0$ ，即 k_1 与 k_2 是函数 $K(k)$ 的两根

换言之，仅有 k_1 与 k_2 满足方程 $K(k) = 0$

2. 斜率替换原理

斜率替换原理 k_1 与 k_2 均为曲线上的斜率，所以 k_1 或 k_2 均可由斜率调整构造产生一系列表达式，这些表达式均与 k_1 或 k_2 等价，则 k 可以选取这一系列表达式。

举例 已知 $k_1 = \frac{y_1}{x_1 - 2}$ 是曲线 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上的斜率，由斜率调整

$$k_1 = \frac{y_1}{x_1 - 2} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{x_1 + 2}{y_1} = \frac{y_1 - (x_1 + 2)}{x_1 - 2 + 4y_1}$$

则 $\frac{y_1}{x_1 - 2}$ 、 $-\frac{1}{4} \cdot \frac{x_1 + 2}{y_1}$ 、 $\frac{y_1 - (x_1 + 2)}{x_1 - 2 + 4y_1}$ 均为 k_1 的变形，都可以代入 $K(k)$ 中，得到 $K(k_1) = 0$ 。

3. 仿新齐次化一般流程

平移（不平移）齐次化顺序：

判断斜率条件/目标→平移或整体换元曲线→利用直线→构造 k 的二次方程→韦达定理

仿新齐次化顺序：

判断斜率条件/目标→构造 $K(k)$ →斜率调整构造→将构造结论代入 $K(k)$ →化简得到直线方程

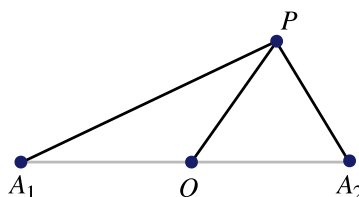
总结对比：

平移齐次化是利用直线与曲线联立构造 $K(k)$ ，而仿新齐次化是由曲线与 $K(k)$ 反推出直线，可见两种齐次化的构造流程是相反。

4. 补充斜率模型

水平/竖直中点斜率关系 已知线段 A_1A_2 的中点为 O ，点 P 是直线 A_1A_2 外一点，则

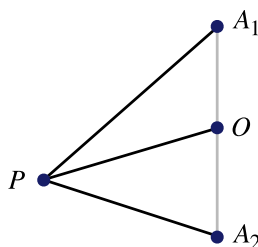
$$\text{若 } A_1A_2 \text{ 水平, 则 } \frac{1}{k_{A_1P}} + \frac{1}{k_{A_2P}} = \frac{2}{k_{OP}}$$



推导 设 $A_1(x_1, n)$ 和 $A_2(x_2, n)$, $P(x, y)$, 则 $O(\frac{x_1+x_2}{2}, n)$, 可得

$$\frac{1}{k_{A_1P}} + \frac{1}{k_{A_2P}} = \frac{x-x_1}{y-n} + \frac{x-x_2}{y-n} = 2 \cdot \frac{x-\frac{x_1+x_2}{2}}{y-n} = \frac{2}{k_{OP}}$$

$$\text{若 } A_1A_2 \text{ 竖直, 则 } k_{A_1P} + k_{A_2P} = 2k_{OP}$$

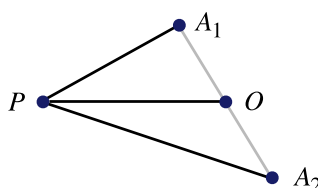


推导 设 $A_1(m, y_1)$ 和 $A_2(n, y_2)$, $P(x, y)$, 则 $O(m, \frac{y_1+y_2}{2})$, 可得

$$k_{A_1P} + k_{A_2P} = \frac{y-y_1}{x-m} + \frac{y-y_2}{x-m} = 2 \cdot \frac{y-\frac{y_1+y_2}{2}}{x-m} = 2k_{OP}$$

水平/竖直中线斜率关系 已知线段 A_1A_2 的中点为 O ，点 P 是直线 A_1A_2 外一点，则

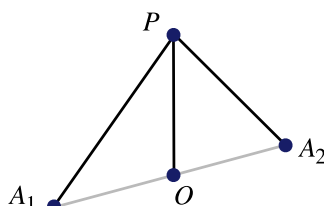
$$\text{若 } PO \text{ 水平, 则 } \frac{1}{k_{A_1P}} + \frac{1}{k_{A_2P}} = \frac{2}{k_{A_1A_2}}$$



推导 设 $A_1(x_1, y_1)$ 和 $A_2(x_2, y_2)$, $O(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$, 则 $P(x, \frac{y_1+y_2}{2})$, 可得

$$\frac{1}{k_{A_1P}} + \frac{1}{k_{A_2P}} = \frac{x-x_1}{\frac{y_1+y_2}{2}-y_1} + \frac{x-x_2}{\frac{y_1+y_2}{2}-y_2} = 2 \cdot \frac{x-x_2}{y_1-y_2} = \frac{2}{k_{A_1A_2}}$$

$$\text{若 } PO \text{ 竖直, 则 } k_{A_1P} + k_{A_2P} = 2k_{A_1A_2}$$



推导 设 $A_1(x_1, y_1)$ 和 $A_2(x_2, y_2)$, $O(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$, 则 $P(\frac{x_1+x_2}{2}, y)$, 可得

$$k_{A_1P} + k_{A_2P} = \frac{y-y_1}{\frac{x_1+x_2}{2}-x_1} + \frac{y-y_2}{\frac{x_1+x_2}{2}-x_2} = 2 \cdot \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = 2k_{A_1A_2}$$

二. 三点型顶点式推导及其应用

1. 顶点式示例

示例 (2017·I卷) 已知 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的上顶点为 P_2 , 设直线 l 不经过点 P_2 且与 C 相交于 A 和 B 两点, 若直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率和为 -1 , 证明: 直线 l 过定点.

STEP 1 设点与斜率 设 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$, $k_{P_2A} = k_1$, $k_{P_2B} = k_2$

STEP 2 写出第三定义 (自证) $k_1 = \frac{y_1-1}{x_1} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{x_1}{y_1+1}$, $k_2 = \frac{y_2-1}{x_2} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{x_2}{y_2+1}$

STEP 3 写出关于 k_1 与 k_2 的二次函数 $K(k) = k^2 - (k_1+k_2)k + k_1k_2$

STEP 4 分别将 k_1 代入 $K(k)$

$$K(k_1) = \frac{y_1-1}{x_2} \cdot (-\frac{1}{4} \cdot \frac{x_1}{y_1+1}) - (k_1+k_2) \cdot (-\frac{1}{4} \cdot \frac{x_1}{y_1+1}) + k_1k_2 = 0$$

STEP 5 化简 得 $y_1-1-(k_1+k_2)x_1-4k_1k_2(y_1+1)=0$, 同理 $y_2-1-(k_1+k_2)x_2-4k_1k_2(y_2+1)=0$

STEP 6 得到直线方程 点 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$ 均满足该形式, 故

$$AB: y-1-(k_1+k_2)x-4k_1k_2(y+1)=0$$

由题可得 $k_1+k_2=-1$, 所以 $AB: y-1+x-4k_1k_2(y+1)=0$, 令 $\begin{cases} y-1+x=0 \\ y+1=0 \end{cases}$, 解得 $x=2$ 和 $y=-1$, 故 l 过定点 $(2, -1)$.

STEP 6就用到了先前提到的 由两点都满足相同方程特征, 并据此推出两点所在直线的方法

整个构造流程就是完整的仿新齐次化, 而其中通过 $K(k)$ 以及 k_1 或 k_2 第三定义, 并结合斜率替换原理, 就得到了

一条蕴含曲线信息, 并以斜率和为直线系数的直线

称为仿新斜率直线.

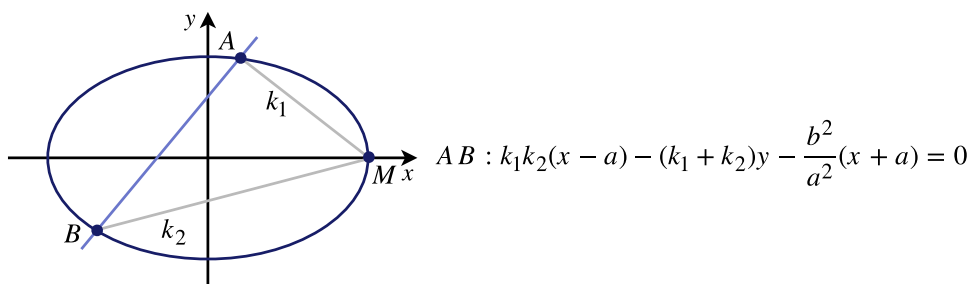
仿新齐次化的目标就是为了推导出这条仿新斜率直线

2. 顶点式的一般推导

顶点式的描述 在示例中, 以圆锥曲线顶点为两斜率的共顶点, 推导出的仿新斜率直线简称为顶点式.

椭圆的顶点式

条件 已知 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上两动点 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$, 右顶点为 M , 设 $k_1 = k_{MA}$ 和 $k_2 = k_{MB}$, 则



推导 构造 $K(k) = k^2 - (k_1+k_2)k + k_1k_2$, 满足 $K(k_1) = K(k_2) = 0$, 由点差法可得

四. 仿新齐次化的多次使用

当题目给出多个条件时, 显然只利用一条仿新斜率直线不足以解决问题; 而通常这类问题可以写出多条仿新斜率直线, 分别代入对应的条件, 得到一系列的斜率关系, 并将其按照需求联立, 最终利用斜率方程解决问题, 其基本流程如下:

STEP 1 在圆锥曲线 Γ 上选好定点 $M(x_0, y_0)$, 作为集群斜率的共顶点

定点 $M(x_0, y_0)$ 的选取, 大多数情况下会选取曲线的顶点, 至于是哪个顶点, 还需要看题目给出的条件

(有些结论可使得对应斜率关系方程更加简单)

STEP 2 根据题目给出的条件, 写出相应弦对应的仿新斜率直线

STEP 3 将条件代入对应的仿新斜率直线中, 得到斜率关系方程

STEP 4 将这些斜率关系方程按照所需进行合理的联立, 得到最终的斜率关系方程

多个斜率方程的联立, 尽量简单的进行, 没有必要都化成 $ak_1k_2 + b(k_1 + k_2) + c = 0$ 这样的一般形式, 或者按个人习惯进行按需联立.

STEP 5 利用最终的斜率方程代入/对比仿新斜率直线, 解决题目问题即可

EXAMPLE 1 已知椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 和点 $R(1,0)$, 过椭圆右焦点 F 的直线与椭圆交于 A 和 B 两点, 直线 AR 和 BR 分别交椭圆与 C 和 D 两点, 求证: 直线 CD 过定点且 $\frac{k_{CD}}{k_{AB}}$ 为定值.

解析

设右顶点为 M , $k_{MA} = k_1$ 和 $k_{MB} = k_2$, $k_{MC} = k_3$ 和 $k_{MD} = k_4$, 由仿新齐次化得

$$AB: k_1k_2(x-3) - (k_1+k_2)y - \frac{5}{9}(x+3) = 0, \text{ 过 } R(1,0), \text{ 则 } k_1k_2 = -\frac{25}{9}$$

$$AC: k_1k_3(x-3) - (k_1+k_3)y - \frac{5}{9}(x+3) = 0, \text{ 过 } F(2,0), \text{ 则 } k_1k_3 = -\frac{10}{9}$$

$$BD: k_2k_4(x-3) - (k_2+k_4)y - \frac{5}{9}(x+3) = 0, \text{ 过 } F(2,0), \text{ 则 } k_2k_4 = -\frac{10}{9}$$

联立得 $k_3k_4 = -\frac{4}{9}$, 代入直线 CD , 得 $CD: x + \frac{1}{3} + (k_3+k_4)y = 0$, 所以直线 CD 过定点 $(-\frac{1}{3}, 0)$, 且

$$k_{AB} = \frac{k_1k_2 - \frac{5}{9}}{k_1+k_2} = -\frac{10}{3} \cdot \frac{1}{k_1+k_2} = 3 \cdot \frac{k_3k_4}{k_3+k_4} = -\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{k_3+k_4} = \frac{4}{3}k_{CD}$$

EXAMPLE 2 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 斜率为1的直线 l 与椭圆交于 A, B 两点, 点 $M(4,0)$, 直线 AM 与椭圆 C 交于点 A_1 , 直线 BM 与椭圆交于点 B_1 , 求证: 直线 A_1B_1 恒过定点.

解析

设右顶点为 $N(2,0)$, $k_{NA} = k_1$ 和 $k_{NB} = k_2$, $k_{NA_1} = k_3$ 和 $k_{NB_1} = k_4$, 由仿新齐次化得

$$AA_1: k_1k_3(x-2) - (k_1+k_3)y - \frac{3}{4}(x+2) = 0, \text{ 过 } M(4,0), \text{ 则 } k_1k_3 = \frac{9}{4}$$

$$BB_1: k_2k_4(x-2) - (k_2+k_4)y - \frac{3}{4}(x+2) = 0, \text{ 过 } M(4,0), \text{ 则 } k_2k_4 = \frac{9}{4}$$

$$AB: k_1k_2(x-2) - (k_1+k_2)y - \frac{3}{4}(x+2) = 0, k_{AB} = 1, \text{ 则 } k_1k_2 - (k_1+k_2) - \frac{3}{4} = 0$$

联立得 $k_3k_4 + 3(k_3+k_4) - \frac{27}{4} = 0$, 又 $A_1B_1: k_3k_4(x-2) - (k_3+k_4)y - \frac{3}{4}(x+2) = 0$, 对比直线 A_1B_1 得

CHAPTER 8

点乘法与向量基底化

章节目标 CHAPTER OBJECTIVES

本章聚焦于解析几何中的高阶代数运算技巧——点乘法与向量基底化。我们将系统梳理两类点乘法的定义、区别及其在面积最值问题中的应用，并深入探讨直线的参数方程与极坐标（涵盖传统概念与向量化的等价替代）。核心在于掌握非单位向量的基底化转化、共线向量参数的同构化处理，以及利用向量外积转化面积等高级工具。

学习本章后，你需要能够：

- 灵活运用两类点乘法：深刻理解第一类与第二类点乘法的几何意义与代数结构，特别是解决涉及面积最值和取等条件的复杂分析。
- 掌握直线参数方程与极坐标的深层逻辑：不仅会写方程，更要理解其参数 t 或 ρ, θ 的几何性质与运算规律，实现向量化思维的无缝衔接。
- 精通向量基底化与外积应用：学会将非单位向量转化为标准基底，利用共线向量参数的同构化简化计算，并通过“定点调整对比比例”和“向量外积”等技巧，将复杂的几何面积与位置关系问题转化为简洁的代数运算。

本章虽看似最不起眼，实则暗藏解析几何中最为精巧且核心的运算心法。无论是两类点乘法的细腻辨析，还是向量基底化、参数同构及外积转化面积等“隐形”技巧，都是实现代数运算降维打击、破解复杂难题的关键钥匙，其价值远超章节篇幅本身。

一. 两类点乘法

1. 第一类点乘法

分类	拉格朗日恒等式
椭圆型	$(x_1x_2 + y_1y_2)^2 + (y_1x_2 - y_2x_1)^2 = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)$
双曲型	$(x_1x_2 - y_1y_2)^2 - (y_1x_2 - y_2x_1)^2 = (x_1^2 - y_1^2)(x_2^2 - y_2^2)$

只需要将恒等式左、右两侧展开即可证明成立

椭圆的第一类点乘法 点 $A(x_1, y_1)$ 与 $B(x_2, y_2)$ 均在 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上，则有椭圆拉格朗日恒等式

$$(\frac{x_1x_2}{a^2} + \frac{y_1y_2}{b^2})^2 + (\frac{y_1x_2 - y_2x_1}{ab})^2 = 1$$

推导 对恒等式 $(x_1x_2 + y_1y_2)^2 + (y_1x_2 - y_2x_1)^2 = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)$ 作替换 $x \rightarrow \frac{x}{a}, y \rightarrow \frac{y}{b}$ ，可得

$$(\frac{x_1x_2}{a^2} + \frac{y_1y_2}{b^2})^2 + (\frac{y_1x_2 - y_2x_1}{ab})^2 = (\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2})(\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2})$$

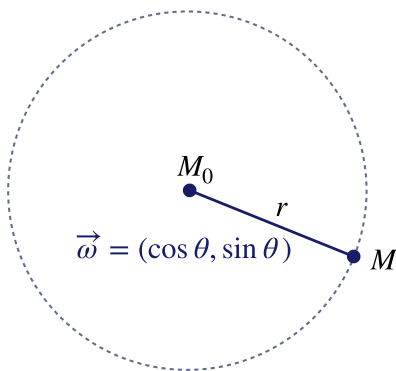
又 $A, B \in \Gamma$ ，所以 $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1$ ，故 $(\frac{x_1x_2}{a^2} + \frac{y_1y_2}{b^2})^2 + (\frac{y_1x_2 - y_2x_1}{ab})^2 = 1$

双曲线的第一类点乘法 点 $A(x_1, y_1)$ 与 $B(x_2, y_2)$ 均在 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上，则有双曲线拉格朗日恒等式

4. 向量化极坐标的等价替代 (新教材适用)

为了在不直接使用极坐标系的前提下达到相同的解题效果, 可以通过向量的方法进行等价转换:

向量化极坐标 假设有定点 $M_0(x_0, y_0)$ 与动点 $M(x, y)$, 转动向量 $\vec{w} = (\cos \theta, \sin \theta)$ ($\theta \in [0, 2\pi)$), 则



$$\overrightarrow{M_0M} = r \cdot \vec{w} = r(\cos \theta, \sin \theta) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + r \cdot \cos \theta \\ y = y_0 + r \cdot \sin \theta \end{cases}, r \geq 0$$

该方程即为点 M 向量化极坐标, 只需按向量的方式来写即可, 注意规定: $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$

EXAMPLE 1 (2023·全国I卷) 在直角坐标系 xOy 中, 点 P 到 x 轴的距离等于点 P 到点 $(0, \frac{1}{2})$ 的距离, 记动点 P 的轨迹为 W .

(1) 求 W 的方程;

(2) 已知矩形 $ABCD$ 有三个顶点在 W 上, 证明: 矩形 $ABCD$ 的周长大于 $3\sqrt{3}$.

解析

(1) $y = x^2 + \frac{1}{4}$;

(2) 设 $A, C, B(x_0, y_0)$ 均在 W 上, $\overrightarrow{BA} = r_1(\cos \theta, \sin \theta)$, $\overrightarrow{BC} = r_2(-\sin \theta, \cos \theta)$, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 解得

$$A(x_0 + r_1 \cos \theta, y_0 + r_1 \sin \theta) \text{ 和 } C(x_0 - r_2 \sin \theta, y_0 + r_2 \cos \theta)$$

$$\text{代入抛物线得} \begin{cases} y_0 + r_1 \sin \theta = (x_0 + r_1 \cos \theta)^2 + \frac{1}{4} \\ y_0 + r_2 \cos \theta = (x_0 - r_2 \sin \theta)^2 + \frac{1}{4} \end{cases}, \text{化简得} \begin{cases} 2x_0 + r_1 \cos \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ -2x_0 + r_2 \sin \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \end{cases}, \text{联立消去 } x_0, \text{ 可得}$$

$$r_1 \cos \theta + r_2 \sin \theta = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$\text{当 } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ 时, } |AB| + |BC| = r_1 + r_2 = 2\sqrt{2} > \frac{3\sqrt{3}}{2};$$

当 $\theta \in (0, \frac{\pi}{4})$ 时, 因为 $\cos \theta > \sin \theta$, 所以 $r_1 \cos \theta + r_2 \sin \theta < (r_1 + r_2) \cos \theta$, 代入化简得

$$|AB| + |BC| = r_1 + r_2 > \frac{1}{\sin \theta \cos^2 \theta} = \frac{1}{\sin \theta (1 - \sin^2 \theta)}, \text{ 又}$$

$$\sin \theta (1 - \sin^2 \theta) = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 2 \sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta) (1 - \sin^2 \theta)} \leq \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$\text{当且仅当 } \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 时取等, 所以 } |AB| + |BC| = r_1 + r_2 > \frac{3\sqrt{3}}{2};$$

当 $\theta \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ 时, 因为 $\sin \theta > \cos \theta$, 所以 $r_1 \cos \theta + r_2 \sin \theta < (r_1 + r_2) \sin \theta$, 同理可得

$$|AB| + |BC| = r_1 + r_2 > \frac{3\sqrt{3}}{2}, \text{ 综上所述矩形 } ABCD \text{ 的周长大于 } 3\sqrt{3}.$$

通常情况下, 会根据对称性选择一个较小的角度区间, 以便于计算



PART 5 导数

CHAPTER 1

极值点的判定

章节目标 CHAPTER OBJECTIVES

本章旨在突破传统的“一阶导数看单调性”的局限，通过研究构造函数在极值点处的高阶导数分布规律，构建一套严谨的导数传递逻辑体系。

学习本章后，你需要能够：

1. 识别结构：深刻理解积分构造类函数在极值点处的导数阶位特征。
2. 逻辑还原：掌握从高阶导数“动力源”出发，通过“传动链”逆向判定原函数极值属性的证明范式。
3. 思维升维：实现从“图像直观判定”向“抽象阶位分析”的思维跨越，从本质上破解含参极值讨论的难题。

请务必反复研磨本章提出的“**导数传动链**”逻辑（**动力源 传动轴 结果端**）。这一逻辑模型并非仅为判定极值而生，它是处理高考导数压轴题的通用密钥。

在接下来的章节中，你会发现：

恒成立、零点问题实质上是利用传动链寻找参数的公切取等临界值

传动链的判定精度，直接决定了你后续处理复杂综合问题的深度。请在进入下一章前，务必确保你能熟练还原从 $f^n(x)$ 到 $f(x)$ 的完整符号传递过程。

一. 极值点判定的导数阶位特征与演变规律

1. 条件形式与理解

条件形式 $x = x_0$ 为函数 $f(x)$ 极值点

以“ $x = 0$ 为函数 $f(x)$ 极小值点”为例，在前文章节“积分构造类不等式”中我们推导出了如下符合条件的不等式：

$$e^x - x - 1, \quad e^x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x - 1, \quad e^x - \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x - 1;$$

观察上述函数在极值点 $x = 0$ 处的导数特征，可以发现如下规律：

对于 $A(x) = e^x - x - 1$ ：

$$A(0) = 0, \quad A'(0) = 0, \quad A''(0) = 1$$

对于 $B(x) = e^x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x - 1$ ：

$$B(0) = 0, \quad B'(0) = 0, \quad B''(0) = 0, \quad B'''(0) = 0, \quad B''''(0) = 1$$

对于 $C(x) = e^x - \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x - 1$ ：

$$C(0) = 0, \quad C'(0) = 0, \quad C''(0) = 0, \quad C'''(0) = 0, \quad C''''(0) = 0, \quad C'''''(0) = 0, \quad C''''''(0) = 1$$

2. 结论归纳

对于由 $e^x - 1$ 连续进行 $n - 1$ 次积分所构造的函数 $f(x)$ ，其在 $x = 0$ 处的导数分布具有如下特性：

低阶导数为零： $f^{(k)}(0) = 0$ ，其中 $k \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$

高阶导数为常数： $f^{(n)}(0) = 1$

这种导数阶位的“清零”与“持恒”现象，是判定极值点阶数的核心依据。

3. 规律背后的导数传递链

极值点的判定实质上是导数符号通过积分层层传递的过程。以 $A(x)$ 为例，其性质可由高阶向低阶逐级锁定：

$A''(0) = 1 > 0 \xrightarrow{\text{穿轴}} A'(x) \text{ 变号} \xrightarrow{\text{单调性}} A(x) \text{ 取得极小值}$

这一过程遵循以下 **递推逻辑**：

- 1. 动力源：最高阶非零导数 $f^{(n)}(0) \neq 0$ 决定了其下一阶导数 $f^{(n-1)}(x)$ 的穿轴方向。
- 2. 传动轴：若 $f^{(k)}(0) = 0$ 且其导函数在该点附近恒正/恒负，则 $f^{(k)}(x)$ 产生单调性。
- 3. 结果端：最终通过 $f'(x)$ 的符号改变（穿轴），锁定 $f(x)$ 的极值属性。

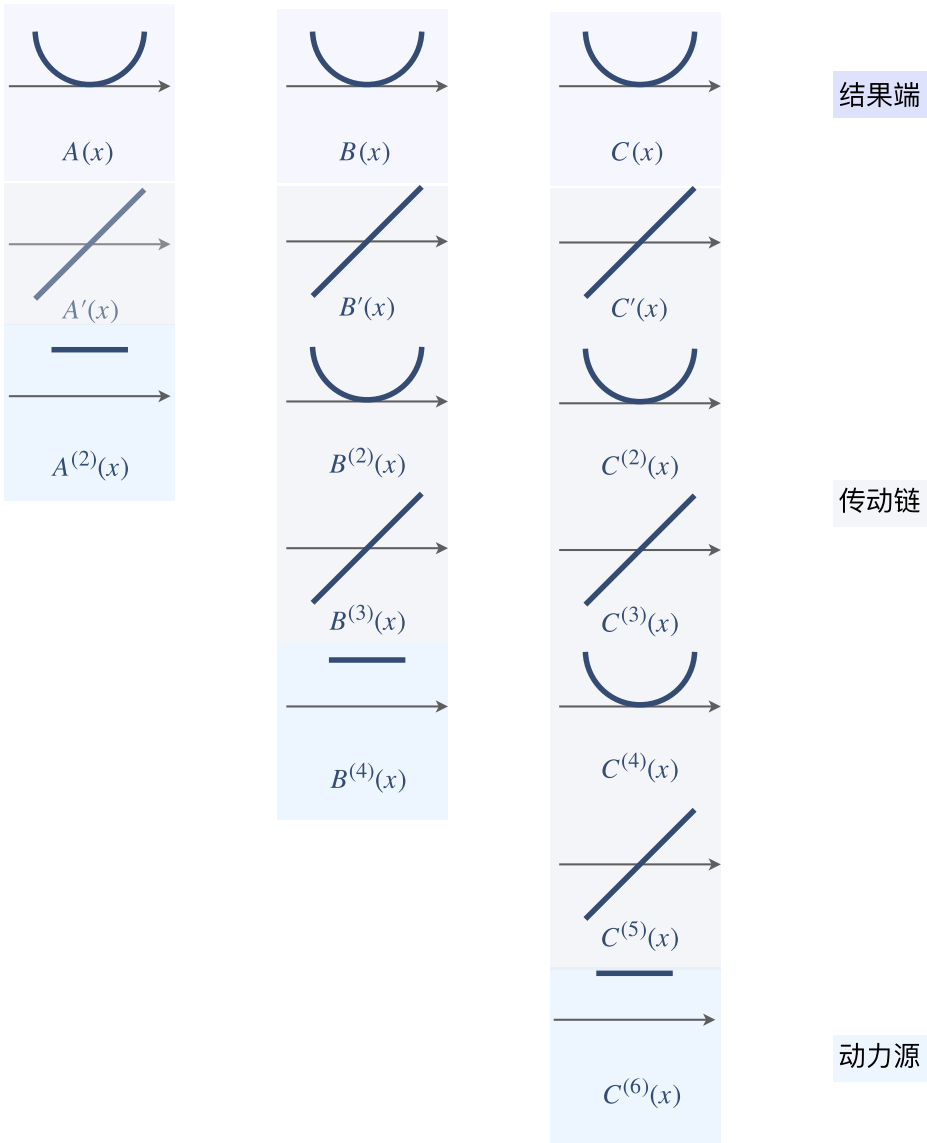
规律泛化：

对于 n 阶构造函数，若 $f^{(n)}(0) > 0$ 且前 $n - 1$ 阶导数均为 0，其极值判定遵循符号传递规律：

若 n 为 偶数： $f^{(n-1)}(x)$ 穿轴 $\Rightarrow f^{(n-2)}(x)$ 极小值 $\Rightarrow \dots \Rightarrow f(x)$ 取得极小值。

若 n 为 奇数： $f(x)$ 在该点附近单调（无极值）。

我们分别以前文的 $A(x), B(x), C(x)$ 进行演示：



CHAPTER 2

动态分析

章节目标 CHAPTER OBJECTIVES

在学习导数时，大家常常会混淆“不等式证明”与“含参恒成立”问题。其实两者的本质差异非常显著：

不等式证明（静态） 只有 x 一个变量，目标单一。

恒成立问题（动态） 同时存在参数 a 和自变量 x 。参数 a 就像一个“调节旋钮”，它和 x 共同作用于函数，约束并改变着 $f(x)$ 的图像行为。

因此，我们需要学会双轨分析：

1. 盯住 x ：分析其 定义域 与 等号成立（取等） 的临界条件。
2. 拨动 a ：分析 参数临界值，以及参数变化让函数图像以何种方式“动”起来。

不等式证明与含参恒成立问题，表面上是“证”与“求”的区别，本质上则是 变量数量 的博弈。不等式证明往往只有自变量；而含参问题则引入了参数。我们需要同时掌控 x （分析定义域、取等条件）与 a （分析参数变化对函数图象的作用）。

另一方面，本章将带你彻底跳出“端点效应”、“极点效应”等碎片化技巧的泥潭，建立以图像动态演变为核心的通用解题体系。如果你之前恰好学过这些“效应”且一头雾水，这不是你的问题，因为“效应”方法论本身就是以偏概全、连蒙带猜、经验主义，这些在你学完本章内容后就会有深刻体会。具体来说

传统端点/极点类理论	动态分析法
解释依赖特定结构（特殊点存在）	端点/极点/非端点均可解释
多数为静态归因	强调演化过程与结构变化
失效时只能说“例外”	失效本身就是预测结果之一
各种效应割裂成多个理论	统一框架下自然推出
多种效应同时作用时无法用单一效应解释	无论多少种效应都在预测结果内
解释性强但泛化弱	解释+泛化兼具

效应体系解决“某些情况”和“局部情况”，动态分析法解决“所有情况”。

我们要让解题从“连蒙带猜”回归到“逻辑必然”：

传统的“效应”是经验主义的经验总结，而“动态分析”是理性主义的降维打击。

一. 出题人是怎么造出“恒成立”题目的？

1. 命题原理

简单来说，他们先找一个“永远 ≥ 0 ”的函数，然后，出题人在某个系数上乱涂乱画，塞进一个参数 a ，变成 $ae^x - x - 1 \geq 0$ ，让你去求 a 的范围。一言以蔽之：

STEP 1 选择一个万能的 取等函数（如经典的 $e^x - x - 1 \geq 0$ ， $x = 0$ 时等号成立）

STEP 2 用参数 a 替换掉其中某个系数，把它变成含参不等式（如 $ae^x - x - 1 \geq 0$ ），并保证当 a 取到边界值时能退化回母函数。

2. 解题原理

既然题目是由取等函数变来的，那么我们就还原出取等函数；首要地，需要得到以下两个要素：

- 1. 参数范围的边界值 a （**参数临界值**），通常就是让函数退化回母函数的那个值（如 $a = 1$ ）。
- 2. 不等式取到等号的 x 的位置（**取等条件**），在参数变动时不会改变（如 $x = 0$ ）。

例如 对于 $ae^x - x - 1 \geq 0$ ，其参数临界值为 $a = 1$ ，取等条件为 $x = 0$ 。

取等、边界、母函数 三位一体，缺一不可。求解的顺序逻辑为：

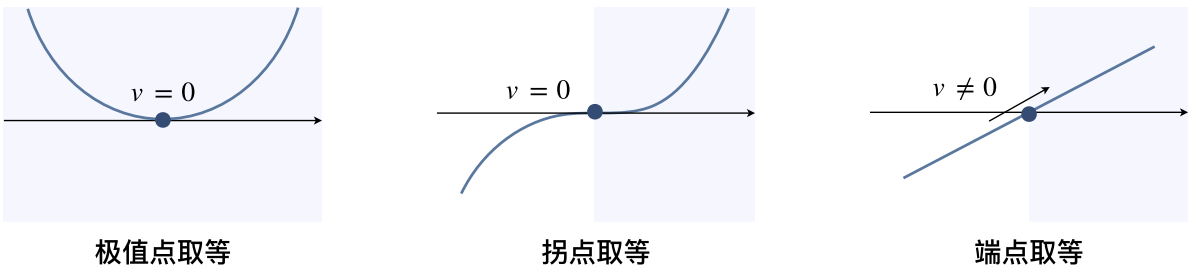
取等 $\rightarrow$ 参数临界值 $\rightarrow$ 母函数

具体求解方式，我们将在接下来的内容中逐一讲解。

二. 自变量分析：取等类型、取等判定、取等性质

1. 局部取等情形

我们要深刻理解“恒成立问题”：当题目要求 $f(x) \geq 0$ 恒成立时，就必须先看清函数图像在跌破 x 轴之前，最后那一刻的“挣扎”姿势，函数图像在最低点不能跌破 x 轴。有以下三种情形：



取等方式	图像特征	数学判别式	典型特点
极值点取等	像个碗底，贴着 x 轴滑过去，不穿透。	$f(x) = f'(x) = 0$	左右两侧的函数值都必须 ≥ 0 。
拐点取等	扭着穿过 x 轴。	$f(x) = f'(x) = 0$	因为穿透了，所以必须有定义域限制（只能要 ≥ 0 的那一侧）。
端点取等	像在墙角，直接在最左端或最右端“踩”在 x 轴上。	$x = \text{端点}$	这里的导数（变化速率）不为0，全靠定义域强行截断。

2. 公切取等 vs 边界取等

从上面三种情况不难看出，在动态变化的函数簇中，不等式 $f(x) \geq 0$ 的临界状态，其等号（即 $f(x) = 0$ ）只可能在两类位置被触发：

定义域的 中间位置 与 边界位置

这两者构成了恒成立问题的完整逻辑闭环，他们分别对应着 **公切取等** 与 **边界取等**：

公切取等 指此时函数不仅函数值为0，且在该点处的切线正好就是 x 轴（变化速率为0）。极值点取等和拐点取等就是最常见的公切形式。判定方程组为

由 $f(x) = f'(x) = 0$ 解出 $x = x_0$ 即公切取等

公切取等方程组有两个方程（ $f(x) = 0, f'(x) = 0$ ）和两个未知数 (x, a) ，故我们可以解出 x_0 。

例如 对任意的 $x \geq 1$, $f(x) = x(\ln x - ax) + a \geq 0$ 恒成立, 判断取等条件.

分析 联立 $f(x) = f'(x) = 0$, 即

$$x \ln x - ax^2 + a = 0, \ln x + 1 - 2ax = 0$$

消 a 得公切取等: $x = 1$.

边界取等 边界取等是指函数在定义域的边缘(端点或 $\pm\infty$)触碰 x 轴。此时函数的变化速率(导数)通常并不为0。它本该穿过 x 轴, 但因为定义域在这里“戛然而止”, 它被强行锁在了 x 轴之上。判定:

定义域	边界取等
(a, b)	a 和 b
$(a, +\infty)$	a 和 $+\infty$
$(-\infty, b)$	$-\infty$ 和 b
$(-\infty, +\infty)$	$-\infty$ 或 $+\infty$

直接代入边界值
 $x = x_{\text{boundary}}$

由此, 我们回顾刚刚的三种情形:

- 极值点取等本质上是公切取等;
- 端点取等本质上是边界取等;
- 拐点取等既是公切取等, 也是边界取等; 因为既具有公切的特征, 又必须依赖边界的保护。

3. 取等的双轨分析

很多同学在考试时只会用“端点效应”去猜, 或者只会用“公切方程”去算, 这就像打仗只看前线不看后方, 极易漏掉关键区间。而正确做法是:

同时分析边界取等和公切取等

原因 真正的恒成立分析, 必须具备全域视野。参数 a 的变化可能会让图像产生复杂的形变:

- 有时, 图像在端点处是安全的, 但由于参数拨动, 函数腹地塌陷, 形成了极小值穿透;
- 有时, 内部极小值一直大于0, 但由于参数拨动, 图像整体发生偏转, 导致端点跌破;

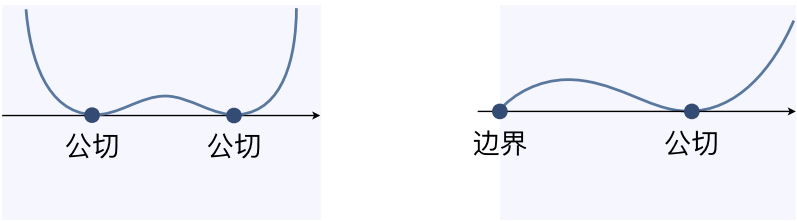
而不能遗漏任何一种情况。

双轨并行策略 为了达到对所有可能性的无死角覆盖, 你的大脑里必须运行两套“扫描程序”:

程序 A 扫描内部 (公切检测) 直接解方程组 $f(x) = f'(x) = 0$ 。这能帮你抓出那些在定义域中间“偷偷下陷”的风险点。后续由公切取等得到的临界参数是 a_0 就是你分段讨论的第一道分水岭。

程序 B 扫描两翼 (边界检测) 考察 $x \rightarrow$ 左边界 和 $x \rightarrow$ 右边界 时函数的表现。有时, 还涉及到利用极限, 看图像在无穷远处是飞向天际还是坠入深渊。

多取等 当我们掌握了公切取等(内部优雅触碰)与边界取等(边缘强行截断)这两大基本盘后, 取等的终极挑战也就浮出水面了: 多取等现象。



主元定界原理2 主元不单调 对于命题 $f(x) = h(a) \geq 0$:

若 $h'(a)$ 既有正也有负, 则 a 既有上界也有下界, 取值范围为 $a_{\min} \leq a \leq a_{\max}$.

除了利用主元定界原理判定参数范围的形式外, 还可以通过动力源分析, 即分析动力源的正负如何使得结果端为“恒成立”, 其原理与 **CHAPTER 1 极值点判定** 一致; 当从 $h'(a)$ 的视角不好判断时, 就应当考虑从动力源的角度入手, 另一方面, 将两种方式结合使用, 往往能大幅优化动态分析的思维量, 详细操作举例请参考本节例题 **EXAMPLE 3&4&5**.

四. 恒成立问题动态分析

1. 构建单调性框架图

单调性框架图是笔者最初构想动态分析时专门设计的可视化工具。传统的分类讨论往往在草稿纸上写满密密麻麻的符号, 而这个图则是用图形化的“容器”, 把定义域、端点、极值和参数的变化趋势一网打尽。

为了让你最直观地看懂这个工具, 我把它拆解为 **结构** 和 **优势** 两个部分:

结构 在草稿纸上画出这个符号时, 它其实代表了一个坐标系的简化投影:



左右两条竖线 |: 代表函数的定义域边界, 即题目的区间端点 (比如 $x = 0$ 和 $x = +\infty$), 它们像两面墙一样, 把函数死死卡在中间; 在下一节的讲解中, 我们会在这两条线上可视化边界取等。

中间那条横线 —: 代表 x 轴; 我们通常会在这条线上标注公切取等点。

骨架内部的空间: 就是函数图像舞动的舞台。在恒成立里, 我们的终极目标是让图像在这个舞台里永远保持在横线 — 的上方 (即 $f(x) \geq 0$)。

优势 它能帮你在分析时做到“眼脑同步”:

1. 它把自变量的区间限制 (竖线) 和函数值的符号限制 (横线) 强行绑定在了一起。
2. 在这个骨架里, 你只需要盯着“左、中、右”三个位置: 左端点有没有坠毁? 中间的谷底有没有塌陷? 右端点有没有跌破?
3. 它把抽象的分类讨论 (若 $a > \dots$, 则 $\dots$), 变成了直观的区域防御游戏。参数一动, 哪里的“墙角”或“谷底”破防了, 在 |—| 图上一目了然。

2. 动态分析操作流程

基本思想 形象点说, 动态分析就好比算命, 只不过对象是函数:

对 x 求导看“长相”, 对 a 求导看“趋势”

长相定取等 (哪里碰地), **趋势定范围** (往哪拨动)。

对 x 求导: 分析的是函数的“长相” (哪里高, 哪里低) —— 取等、参数临界值、临界函数单调性

对 a 求导: 分析的是函数的“命运” (随参数变动时, 图像是整体飞升还是坠入深渊)。

当你能熟练地对参数求导并划分区间时, 你手里拿到的就不再是一个干巴巴的代数式, 而是一台可以任意调控图像的“精密仪器”。这种动态控制感, 就是解决含参恒成立问题的最底层逻辑。

再次强调，我们所讲的全部内容都遵循 **逻辑确定性**，你不需要去猜

取等在哪？有几个取等？是什么效应？大于还是小于？

换句话说，当其他人还在苦苦钻研“必要性探路”时，你做的是百密而无一疏的“充要性判定”；以下是具体操作流程：

STEP 1 算临界（公切判定）、判断属性并作出图像

由 $f(x) = f'(x) = 0$ ，得到临界参数 a' 、取等位置 x_0 和临界函数 $f_{\text{临界}}(x)$ ，并画在 $|-|$ 图上；

- 若取等点是黏性的，则用 $\times$ 标注，若取等点是非黏性的，则用 $\bullet$ 标注；
- 分析 $f_{\text{临界}}(x)$ 单调性，并画在 $|-|$ 图中。

$f_{\text{临界}}(x)$ 是后续动态观察的“基准线”。

STEP 2 分析边界及其对应临界函数

令 $x \rightarrow$ 定义域端点（如 $0, +\infty, -\infty$ ），分析函数在远端的走向；需要标注 $|-|$ 图的6个点；



- 对于 E, F ，我们需要写出边界的具体值；
- 对于 A, B, C, D ，我们需要标出“ $x \rightarrow$ 边界， $f(x) \rightarrow \pm \infty$ 时”对应 a 的取值范围；
- 若取等点是黏性的，则用 $\times$ 标注，若取等点是非黏性的，则不作标注，但两者都要在旁边写上对应的参数取值范围；
- 若边界处取等点非黏性，则还需画出参数临界值对应的临界函数。

目的：观察图像在无穷远处是“飞向天空”还是“坠入深渊”。

STEP 3 消参求定点

令参数 a 的系数为 0，解出不随 a 变化的固定坐标点，用 $\times$ 标注在 $|-|$ 图上

目的：找到图像旋转或形变的支点。

STEP 4 拨旋钮（主元动力分析）

对参数 a 求导得到 $h'(a)$ ，分析参数对函数高度的提拉或压制作用。

从 STEP 1 和 STEP 2 得到的临界值作为分界点，划分参数区间，并从相应临界函数开始进行分析；

如果存在，请特别注意黏性公切取等点，需要依据“动力传导链”严格判定函数是否会穿越 x 轴；

结合临界函数图像，判定每一个区间是否恒成立，最终锁定闭环后的参数范围。

思考 分参的本质是什么？是通法吗？

答案 假设把分参看成 $f(x) = g(x) + a \geq 0$ ，那就无非是 $g(x)$ 的上下平移运动了，其复杂程度取决于 $g(x)$ ；因此分参也属于动态分析，但不能称之为通法， $g(x)$ 若不方便分析会造成很多麻烦，所以做任何一道恒成立题目前，需要考虑乘除恒正项、对不等式进行形式上的优化，灵活平衡“动态分析”和“函数形式”的权重，二者都相对容易时，便是通法。

$f(1) = 0 \Rightarrow$ 参数边界值 $a = e$, 临界函数 $f_O(x) = e^x - ex$

STEP 2 分析边界及其对应临界函数

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \rightarrow \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \rightarrow a\infty$

由于“ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \rightarrow a\infty$ ”正负不定, 故产生了临界值 $a = 0$, 临界函数 $f_B(x) = e^x$

STEP 3 消参求定点

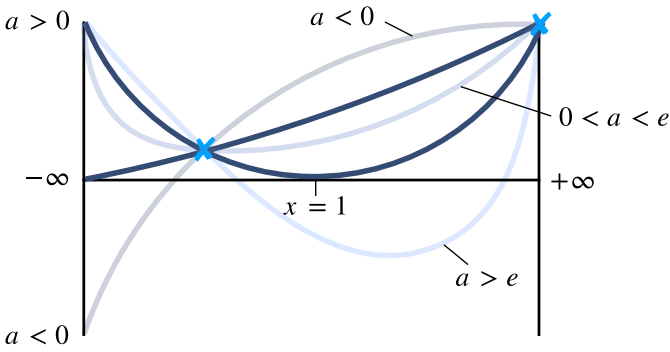
$-ax = 0$, 得 $x = 0$, 过定点 $(0,1)$.

STEP 4 拨旋钮 (主元动力分析)

求 $h'(a)$, 分析参数对函数的作用, 假设 a 增大或减小, 将得到的参数临界值在定义域内划分出的所有区间分别动态分析, 画出函数变化草图, 根据草图得到恒成立区间

$h'(a) = -x$

参数作用 当 $x \geq 0$ 时, $h'(a) \leq 0$, $f(x)$ 随 a 的增大而减小, 当 $x < 0$ 时, $h'(a) > 0$, $f(x)$ 随 a 的增大而增大.



参数区间 参数临界值为0和 e , 故有 $(-\infty, 0)$ 、 $a = 0$ 、 $(0, e)$ 、 $a = e$ 、 $(e, +\infty)$ 五个区间.

分别判断	最终结果
$a = e$ 时: 为临界情况, 成立.	$0 \leq a \leq e$ 时, 成立; $a < 0$ 或 $a > e$ 时, 矛盾.
$a > e$ 时: 根据 $a = e$ 的临界情况作出草图, $x = 1$ 处矛盾.	
$a = 0$ 时: 为临界情况, 成立.	
$0 < a < e$ 时: 根据 $a = 0$ 和 $a = e$ 的临界情况作出草图, 成立.	
$a < 0$ 时, 如图存在负区间, 不符合题目条件	

我们通过动态分析精准地得到了答案, 接下来写出标准过程即可; 但假设你足够敏锐, 你会发现如果此题问的是 $f(x)$ 的零点个数, 动态分析也精确的展现出了不同参数取值范围下的零点个数; 这就是动态分析的强大之处——精准得到 $f(x)$ 变化过程, 无论题目设问是什么, 动态分析都能逻辑严密地得到答案; 至于“零点问题”的具体细节, 我们将在稍后的章节详细讲解。

解答过程

STEP 1 确立基准, 证明临界函数恒成立

$a = e$ 时: $f'(x) = e^x - e$, 当 $x \geq 1$ 时, $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 单调递增, 当 $x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 故 $f(x) \geq f(1) = 0$, 成立.

$a = 0$ 时: $f(x) = e^x > 0$, 成立.

STEP 2 正面论证, 主元放缩

哪些区间矛盾、证明成立时主元放缩的方向、说明矛盾时矛盾点在何处产生，甚至还可以按照同一逻辑分析零点问题，在本章后方，还会有一系列进阶设问，他们跟“效应”将八竿子打不着边，但是动态规划依旧可以解决。

这一切都是“效应”无法做到的，动态分析是一种适用于任何情景的分析思想，究其根本：动态分析具有逻辑确定性，而效应，说直白点，和“猜”没有区别。

EXAMPLE 3 已知 $f(x) = ax^2 - ax - x \ln x$, $f(x) \geq 0$, 求 a 的取值范围.

分析过程

STEP 1 算临界（公切判定）并判断属性

这里 $x > 0$, 故考虑除 x , 即:

$$F(x) = ax - a - \ln x \geq 0$$

当然你也可以不除 x 直接做，就是会略微麻烦一点.

$F(x) = F'(x) = 0$, 消 a 得取等 $x = 1$; $F(1) = 0$, 黏性;

故需要探动力源 $F'(1) = a - 1$, 解得参数边界值 $a = 1$, 边界函数 $F_0(x) = x - 1 - \ln x$.

STEP 2 分析边界及其对应临界函数

左边界: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \rightarrow \infty$, 不受 a 影响, 无边界值/边界方式.

右边界: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \rightarrow a\infty$, 正负不定, 故产生了临界值 $a = 0$, 临界函数 $F_B(x) = -\ln x$

在熟练了 **EXAMPLE 1** 和 **EXAMPLE 2** 后, 这里需要注意一个小细节, 在分析边界取等时, 若已经出现了矛盾, 可以把相应区间直接移除动态分析的范围, 例如这里的“ $a \leq 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) < 0$ ”, 即将原命题简化为:

$a > 0$, $F(x) \geq 0$, 求 a 的取值范围.

对应的边界分析应为:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \rightarrow \infty$$

STEP 3 消参求定点

过定点 $(1,0)$. (即黏性公切取等)

STEP 4 拨旋钮（主元动力分析）

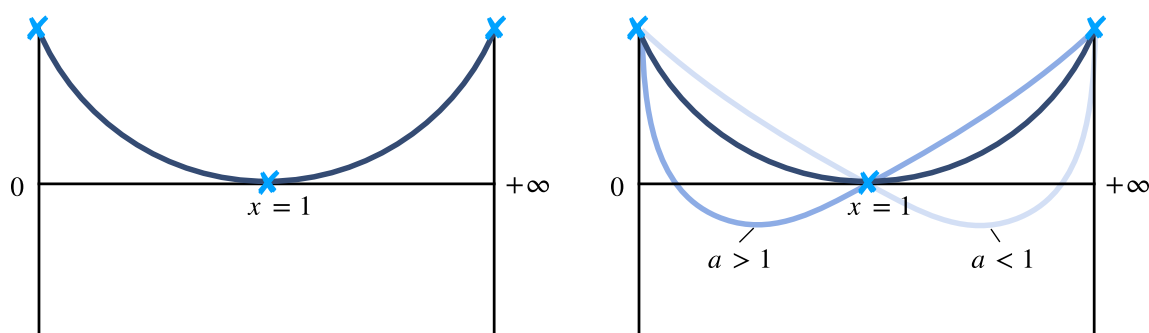
$$h'(a) = x - 1$$

$x > 1$ 时, $a \uparrow F \uparrow$, $a \downarrow F \downarrow$; $x < 1$ 时, $a \uparrow F \downarrow$, $a \downarrow F \uparrow$;

这里是黏性取等, 故还需分析动力源:

$$F''(0) = a - 1$$

$a < 1$ 时, $F''(0) < 0 \Rightarrow F(x)$ 会从左上至右下穿过 x 轴; $a > 1$ 时, $F''(0) > 0 \Rightarrow F(x)$ 会从左下至右上穿过 x 轴.



一言以蔽之，传统定义恰恰抛弃了最核心的“ $h'(a)$ 在 x_0 左右两侧异号”，只拿“残存现象”来当定义，这样是毫无用处的；

当然，你也许会问“可不可以按照上面动态分析视角下的严谨定义去使用极点效应？”，答案是完全可以，只要满足两个前提条件，得到的答案是100%精准的。但是没有必要——这是动态分析水到渠成的结果，无数种变化中的其中之一，落脚点应该为动态分析的流程，而非单独记忆其某种情景。

EXAMPLE 4 已知 $f(x) = e^x + ax^2 - x - \frac{1}{2}x^3 - 1 \geq 0$ 恒成立，求 a 的取值范围。

分析过程

STEP 1 算临界（公切判定）并判断属性

$f(x) = f'(x) = 0$ ，消 a 得取等 $x = 0$ 和 $x = 2$ ；

对于 $x = 2$ ： $f(2) = 0$ ，得边界值 $a = (7 - e^2)/4$ ，故边界函数为

$$f_1(x) = e^x + (7 - e^2)/4 \cdot x^2 - x - 1/2x^3 - 1$$

对于 $x = 0$ ： $f(0) = 0$ ，故需要探动力源 $f''(0) = 1 + 2a = 0$ ，得参数边界值 $a = -1/2$ ，边界函数为

$$f_2(x) = e^x - 1/2x^2 - x - 1/2x^3 - 1$$

在 **EXAMPLE 3** 的 **STEP 2** 中，我们利用边界的局部排除了一部分区间，给后续动态分析省去了不少麻烦，那么其实对去非黏性的公切，也可以考虑这样的操作，对于 $f(2) \geq 0$ ，得到 $a \geq (7 - e^2)/4$ ，从而排除区间：

$$a < (7 - e^2)/4$$

也就是说，临界函数 $f_2(x)$ 无需出现在我们后续动态分析中；

STEP 2 分析边界及其对应临界函数

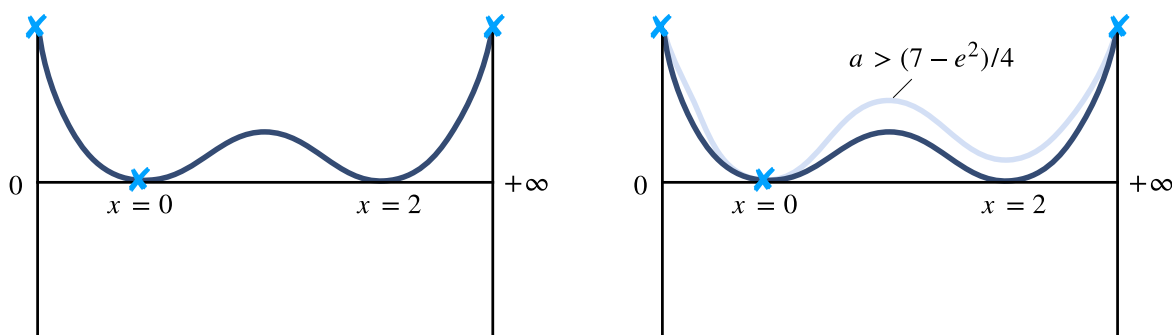
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \rightarrow \infty$$

STEP 3 消参求定点

过定点(0,0). (即黏性公切取等)

STEP 4 拨旋钮（主元动力分析）

$$h'(a) = x^2 \geq 0, \quad a \uparrow F \uparrow, \quad a \downarrow F \downarrow$$



解答过程

当 $a < \frac{7 - e^2}{4}$ 时， $f(2) < 0$ 矛盾；当 $a = \frac{7 - e^2}{4}$ 时，考虑证 $f(x) = e^x + \frac{7 - e^2}{4}x^2 - x - \frac{1}{2}x^3 - 1 \geq 0$ ，即

$$M(x) = 1 - \frac{\frac{e^2 - 7}{4}x^2 + x + \frac{1}{2}x^3 + 1}{e^x} \geq 0,$$

六. 一般化动态分析

1. 位置参数与形状参数作用动态分析

模型原型 对于含有参数 a, b 的函数族：

$$F(x, a, b) = f(x) + g(a, x) - b \geq 0$$

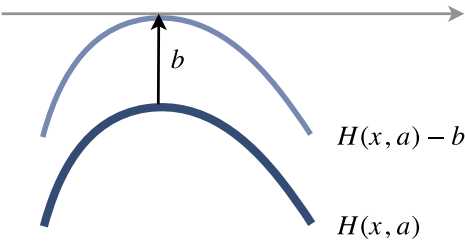
当 b 仅以“平移量”形式出现时，其本质是寻求函数 $h(x, a) = f(x) + g(a, x)$ 在定义域内的全局最小值 $h_{\min}(a)$ 。

参数角色分类表 在解题过程中，明确参数的“功能”是第一步：

参数角色	数学功能	图象效应	处理策略
位置参数 (b)	垂直位移	整体上下浮动	视为“边界约束”，最后处理
形状参数 (a)	改变曲率、极值位置	改变凹凸性或倾斜度	视为“主元”，参与求导与分类讨论

EXAMPLE 若 $f(x) = ax^2 - (6 + a)x + 3 \ln x$, $a \leq -\frac{9}{2}$ 时, $f(x) + ax - b \geq 0$ 有解, 求 b 的最大值.

分析 记 $H(x, a) = ax^2 - 6x + 3 \ln x$, $F(x) = H(x, a) - b$, 则函数 $F(x)$ 的形状受 a 影响。而 b 会影响 $F(x)$ 的上下浮动, 故 b 的作用即让 $f(x)$ 与 x 轴产生接触; 因此, b 取得的最大值, 也就是 $H(x, a)$ 到 x 轴的最小距离;



而 $H(x, a)$ 到 x 轴的最大距离由 a 决定, a 越大, $H(x, a)$ 到 x 轴的距离也就越小, 因此 a 取最大值 $-\frac{9}{2}$ 时, b 有最大值.

解析 记 $F(x) = f(x) + ax - b$, 则

$F(x)$ 随 a 增大而增大, 随 b 增大而减小

$\therefore a = -\frac{9}{2}$ 时, b 有最大值, $H(x) = f(x) + ax = -\frac{9}{2}x^2 - 6x + 3 \ln x$, $H'(x) = -9x + \frac{3}{x} - 6$;

当 $0 < x \leq \frac{1}{3}$ 时, $H'(x) \geq 0$, $H(x)$ 单调递增;

当 $x > \frac{1}{3}$ 时, $H'(x) < 0$, $H(x)$ 单调递减;

$\therefore H(x) \leq H(\frac{1}{3}) = -\frac{5}{2} - 3 \ln 3$; $\therefore b \leq -\frac{5}{2} - 3 \ln 3$, 最大值为 $-\frac{5}{2} - 3 \ln 3$.

2. 极值点轨迹

极值点的轨迹 即参数方程所确定的函数, 其极值点随参数变化所形成的路径;

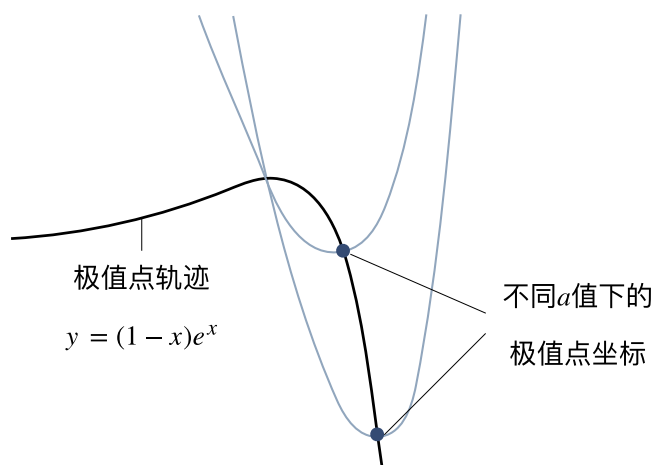
核心思路 消参 即通过极值存在的必要条件 $f'(0) = 0$ 建立参数与坐标之间的关系, 最后将参数消去。

基本步骤 假设给定一个含参数 a 的函数 $f(x)$, 求其极值点 $(x_0, f(x_0))$ 的轨迹:

STEP 1 通过 $f'(x_0) = 0$ 表示 a , 记为 $a = g(x_0)$;

STEP 2 将 $f(x_0)$ 中的所有 a 替换为 $g(x_0)$, 所得函数即为极值点或拐点的轨迹.

EXAMPLE 函数 $f(x) = e^x - ax$.



设极值点为 x_0 , $f'(x_0) = 0 \Rightarrow a = e^{x_0}$, 故 $f(x_0) = e^{x_0} - ax_0 = e^{x_0} - e^{x_0}x_0 = (1-x_0)e^{x_0}$, 故轨迹为

$$y = (1-x)e^x$$

极值点轨迹能让我们对很多问题有一种全新的理解, 比如

恒成立问题的理解

$$f(x) \geq 0 \text{ 恒成立} = f(x) \text{ 的极小值点轨迹 } y \geq 0$$

例如 **EXAMPLE** 的 $f(x) = e^x - ax \geq 0$, 只需要 $y = (1-x)e^x \geq 0$, 即 $x_0 \leq 1$, 故

$$a = e^{x_0} \leq e$$

当然, 这只能涵盖“极小值点存在”的情况, 当 $a \leq 0$ 时无极值点, 需单独分析.

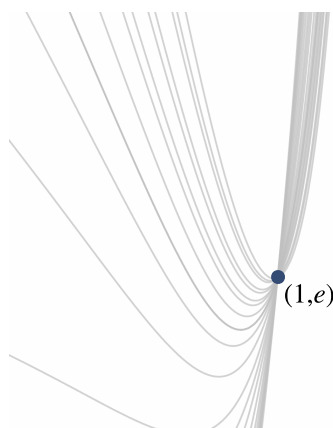
3. 基于定点的动态变化命题及其在极值点轨迹视角下的推广

命题人通常利用函数族恒过定点（或公共特征点）的特性, 通过设置参数让函数在平面上进行运动。

设计逻辑 命题人以此为约束, 构造出使“最值点恰为定点”的临界条件, 从而化为寻找“最难贴合”函数图像的特殊线束问题。

动态过程 函数族的线束绕定点旋转

以函数 $f(x) = xe^x - ax + a + b$ 为例, 其动态过程呈现为:



定点锚定 函数 $f(x)$ 恒过定点 $(1, e)$

动态旋转 在定点左侧, 函数值随 a 增大而增大; 在定点右侧, 函数值随 a 增大而减小。参数 b 起到垂直平移的作用, 负责将 $g(x)$ 线束整体上移或下移, 以贴合 x 轴。

临界状态 当某一条特定参数下的函数使得其最小值点恰好落在 $x = 1$ （即定点处）时, 该状态即为恒成立问题的临界点。

此时题目往往会问，若存在实数 a ，使得 $f(x) \geq 0$ 对任意 $x \in R$ 恒成立，求实数 b 的取值范围.

分析思路 从参数分离到临界定位

处理此类问题时，遵循以下分析路径：

STEP 1 定点化 寻找函数簇的恒过定点 (x_0, y_0) 。

STEP 2 动态监测 分析参数 a 的变化如何影响函数图像在定点邻域的单调性及最值位置。

STEP 3 确定“最难贴合”线 不等式恒成立往往由最严苛的那个特殊函数决定，即“极值点位于定点”的那条轨迹函数。

STEP 4 矛盾分析 利用反证法思想，若参数取值越过临界点，则在定点处必然出现函数值小于 0 的矛盾，从而确定参数取值范围。

书写过程规范 以例题为例

在解答此类问题时，建议遵循以下书写逻辑：

STEP 1 论证在该临界参数下结论成立 令函数 $h(x) = f(x)|_{\text{临界参数}}$ ，通过证明极小值非负，确保该临界函数满足恒成立条件。

STEP 2 说明矛盾 并说明若参数偏离该值，则在定点处会出现 $f(x_0) < 0$ 的矛盾，从而得出最终取值范围。

EXAMPLE 1 若存在实数 a ，使得 $f(x) \geq 0$ 对任意 $x \in R$ 恒成立，求实数 b 的取值范围.

解析

记 $g(x) = xe^x - 2ex + 2e \geq e$ （自证）； $f(x) = g(x) + b \geq 0$

当 $b \geq -e$ 时，存在 $a = 2e$ ，使得恒成立；

当 $b < -e$ 时，取 $x = 1$ 矛盾.

EXAMPLE 2 已知函数 $f(x) = (b - e)e^x - x + bm$ ($b > 0$)，若存在实数 $b > 0$ ，使得 $f(x) \geq 0$ 对任意 $x \in R$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

分析

STEP 1 分离位置参数与形状参数

$$g(x) = \frac{(b - e)e^x - x}{b} \geq -m$$

STEP 2 求 $g(x)$ 过的定点

$g(x) = e^x - \frac{1}{b}(e^{x+1} + x)$ ，显然当 $x = -1$ 时， $g(x) = \frac{1}{e}$ ；定点为 $(-1, \frac{1}{e})$ ，故只需 $m \geq -\frac{1}{e}$ ($g'(-1) = 0$ 得 $b = 2e$) .

解析

当 $m \geq -\frac{1}{e}$ 时，存在 $b = 2e$ ，使得 $f(x) = e^{x+1} - x + 2em \geq e^{x+1} - x - 2 \geq 0$ 恒成立（不等式自证）；当 $m < -\frac{1}{e}$ 时， $f(-1) < 0$ 矛盾.

5. 水平平移&伸缩变换动态分析

水平平移动态分析 在一轮函数部分我们讲过，对于

$$f(x) \Rightarrow f(x+a)$$

即将 $f(x)$ 向左平移 a 个单位得到 $f(a+x)$ ；

伸缩变换动态分析 同样的

$$f(x) \Rightarrow f(ax)$$

即将 $f(x)$ 水平拉伸得到 $f(ax)$ ：

参数 a 的范围	几何变换效果	形象描述
$a > 1$	水平压缩	图像向 y 轴方向“靠拢”，变窄了。
$0 < a < 1$	水平拉伸	图像向远离 y 轴方向“散开”，变宽了。

当命题为探讨 $h(x)$ 与 $f(ax)/f(x+a)$ 的关系（恒大于、交点个数）时，还原其平移/伸缩的变换过程往往是最佳思路，相反，直接使用常规处理手段，则会极其麻烦；

常规处理往往会主元不单调，且计算取等时表达式复杂；

具体来说，有以下步骤：

STEP 1 观察结构，将命题转换为分析 $f(x)$ 与 $f(x+a)/f(ax)$ 的关系

STEP 2 作出 $f(x)$ 图像与 $f(x+a)/f(ax)$ 的各个情况下的图像

STEP 3 通过图像展现的结果得到确切答案

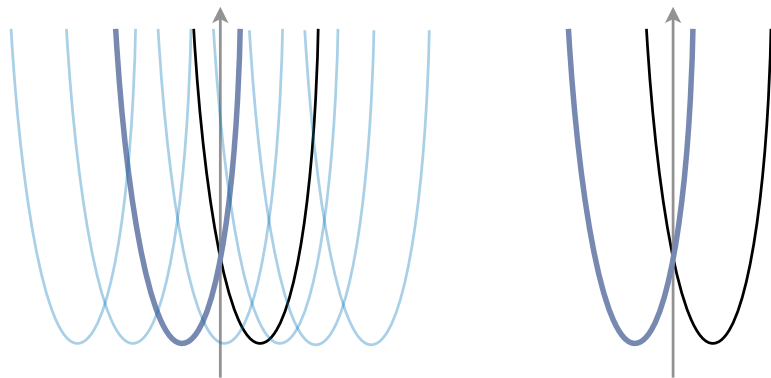
EXAMPLE 1 已知函数 $f(x) = xe^x - 3x + 1$ ，若 $x > 0$ 时， $f(x+m) - f(x) > m$ 恒成立，求 m 的取值范围.

STEP 1 观察结构，转换命题 即 $f(x+m) - f(x) > x+m-x$ ，即

$$f(x+m) - (x+m) > f(x) - x$$

记 $F(x) = xe^x - 4x + 1$ ，即 $F(x+m) > F(x)$

STEP 2 作出 $f(x)$ 图像 看作函数动态平移，临界发生在定义域边界 $x = 0$



STEP 3 通过图像展现的结果得到确切答案

当 $0 \leq m < \ln 4$ 时，取 $x = 1$ ， $F(1+m) \leq F(1)$ ，矛盾；

当 $m < 0$ 时，取 $x \rightarrow \infty$ ， $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x+m) = e^{x+m} > e^x = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$ ，矛盾；

当 $m \geq \ln 4$ 时，记 $h(m) = F(x+m)$ ， $h'(m) = F'(x+m) = (x+1+m)e^{x+m} - 4 > 0$ ，故 $F(x+m) \geq F(x)$.

而对于公切 $x = 1$ ，则考虑用动力源

$$f''(1) \geq 0 \Rightarrow a \leq 0$$

综上： $-\ln 2 \leq a \leq 0$ ；下面需严谨证明该区间成立

$$e^a - e^{ax} \geq e^{\frac{a}{x}} - e^a$$

以参数为主元的复合结构 记 $h(a) = e^a - e^{ax}$ ，即证 $h(a) \geq h(\frac{a}{x})$

$$h'(a) = e^a - x e^{ax} = g(x)$$

$g'(x) = e^{ax}(1 - ax) \geq 0$ ，故 $h'(a) = g(x) \geq g(0) = e^a > 0$ ，故 $h(a)$ 单调递增，即证 $a \geq \frac{a}{x}$ ，即 $1 \geq \frac{1}{x}$ ，成立。

EXAMPLE 2 (2026·武汉五调) 已知函数 $f(x) = x e^x - 3x + 1$ 。

(1) 若 $x > 0$ 时， $f(x+m) - f(x) > m$ 恒成立，求 m 的取值范围；

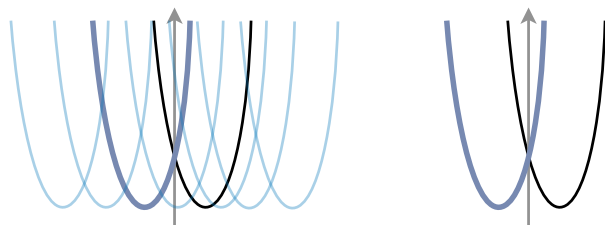
(2) 若 $x > 0$ 时， $f(x+k) + f(k-x) > 2f(k)$ 恒成立，求 k 的最小值。

解析

(1) 以变量为主元的复合结构（看作平移） 即 $f(x+m) - f(x) > x+m-x$ ，即

$$f(x+m) - (x+m) > f(x) - x$$

记 $F(x) = x e^x - 4x + 1$ ，即 $F(x+m) > F(x)$



看作函数动态平移，临界发生在定义域边界 $x = 0$

当 $0 \leq m < \ln 4$ 时，取 $x = 1$ ， $F(1+m) \leq F(1)$ ，矛盾；

当 $m < 0$ 时，取 $x \rightarrow \infty$ ， $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x+m) = e^{x+m} > e^x = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$ ，矛盾；

当 $m \geq \ln 4$ 时，记 $h(m) = F(x+m)$ ， $h'(m) = F'(x+m) = (x+1+m)e^{x+m} - 4 > 0$ ，故

$$F(x+m) \geq F(x)$$

综上： $m \geq \ln 4$ 。

(2) 以参数为主元的复合结构

当 $k \geq -2$ 时，即 $f(k+x) - f(k) \geq f(k) - f(k-x)$ ，记 $F(k) = f(k+x) - f(k) = (k+x)e^{k+x} - k e^k - 3x$ ，即证

$$F(k) \geq F(k-x)$$

即证 $F(k)$ 单调递增：

$$F'(k) = (k+x+1)e^{k+x} - (k+1)e^k > (k+1)e^k - (k+1)e^k = 0$$

故 $F(k) \geq F(k-x)$ ；

当 $k < -2$ 时，记 $A(x) = f(x+k) + f(k-x) - 2f(k)$ ， $A(0) = A'(0) = 0$ ， $A''(0) < 0$ ，故 $\exists x_1 > 0$ 使得 $A'(x_1) < A'(0) = 0$ ，在 $(0, x_1)$ 上 $A(x)$ 单调递减，故 $A(x_1) < A(0) = 0$ 。

分析：以 k 为主元， $f(k+x) + f(k-x) > 2f(k)$ ，即临界发生在拐点位置，即 $f''(k) = 0 \Rightarrow k = -2$

FINAL CHAPTER

信息直观化翻译

一. 新高考I卷T19核心特征

新高考I卷压轴题的核心特征是：

定义了一个操作→考察该操作下的逻辑规律

做这类题时，你不是在做数学计算，而是在玩一个逻辑游戏。规则（定义）虽然复杂，但游戏里的逻辑是不会变的。一言以蔽之：

先理解游戏规则，再出牌

二. 翻译与量化流程

以下是我解决这类问题时思考的一般流程：

STEP 1 翻译——规则“语义化”

不要被晦涩的定义吓倒，用任何你想要的方式（直白的语言/模型/图像）将定义“翻译”出来。

STEP 2 降维——利用边界值刻画行为

利用初始化、特殊值测试该规则的“性格”。观察算子（规则）在特殊点是否会退化、消失或变得极其简单。通常来说，题目的第一问往往就是在让你测试边界值。

STEP 3 映射——建立条件与性质的逻辑链

EXAMPLE 1 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，且当 $x < 0$ 时， $f(x) = 2^x$ 。对任意 $x_0 \in \mathbf{R}$ ，定义集合

$$D(x_0) = \{d \in \mathbf{R} \mid f(x_0 + d) > f(x_0)\}.$$

看完主题干，就需要立即进行 **STEP 1**，因为在不懂规则的情况下去读后方小问没有任何意义。

STEP 1 翻译——规则“语义化”

集合 $D(x_0) = \{d \in \mathbf{R} \mid f(x_0 + d) > f(x_0)\}$ 涉及到两个量

x_0 与 d

“ $\mid$ ”前的 d 是该集合的主体，即 $D(x_0)$ 描述的是满足该规则的所有 d 的集合；

下面分析 $f(x_0 + d) > f(x_0)$ 的含义，即

当固定了 x_0 ，函数值 $f(x_0)$ 就是一个定值。 d 则是相对于 x_0 的“向左的偏移量”，即偏移后得到的函数值 $f(x_0 + d)$ 需大于原函数 $f(x_0)$ 。

所以， $D(x_0)$ 实际上就是在描述

集合 $D(x_0)$ ：所有能让函数值变大的向左的位移 d 组成的集合。

至此，翻译结束，接下来看第一小问并进行 **STEP 2**；

(1) 若当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = 1 - x$ ，求 $D(-1)$ ；

STEP 2 代入特殊值进行测试