

CHAPTER 1	1
微积分简介	1
一. 微积分的核心思想	1
二. 微元与导数	1
1. 微元的定义	1
2. 导数	2
三. 定积分初步	2
1. 定积分——微元法的数学实现步骤	2
2. 定积分的几何意义	3
CHAPTER 2	4
运动学	4
一. 质点	4
1. 质点的定义	4
2. 可以看作质点的情况	4
二. 参考系	4
1. 参考系的定义	4
2. 参考系的性质	4
3. 选取原则	4
三. 三大运动学图像	4
1. 位置-时间图像	4
2. 速度 - 时间图像	5
3. 加速度 - 时间图像	5
四. 匀变速直线运动	6
1. 定义与分类	6
2. 基本公式	6
3. 位移中点速度	7
4. 逐差法公式	7
5. 六个比例规律	8
五. 匀变速直线运动常见模型	10
1. 模型	10
2. 等时回归模型	11
六. 自由落体运动	12
1. 定义	12
2. 公式	12
3. 竖直上抛运动	12
七. 复杂运动图像分析	13
八. 刹车问题	16
1. 逆向思维	16
2. 两类刹车情景	16
九. 参考系变换	18
十. 追击相遇问题	19
1. 慢追快模型	20
2. 快追慢模型	21
CHAPTER 3	23

静力学	23
一. 力学基础知识	23
1. 力的定义与矢量性	23
2. 力的合成与分解	23
3. 受力分析的基本方法	24
二. 常见力的分类分析	27
1. 重力	27
2. 弹力	28
3. 摩擦力	42
三. 受力分析	45
1. 共点力平衡	45
2. 力矩平衡 (拓展)	45
3. 动态平衡问题	50
四. 常见模型总结	59
1. 临界条件汇总	59
2. 全反力和摩擦角	60
3. 晾衣架模型	61
CHAPTER 4	66
牛顿定律	66
一. 国际单位制	66
二. 牛顿定律	66
1. 牛顿第一定律	66
2. 牛顿第二定律	67
3. 牛顿第三定律	70
4. 非惯性系简介 (拓展)	70
三. 视重变化与等时圆模型	70
1. 超重与失重	70
2. 直线滑轨	71
3. 伽利略的等时圆模型	72
四. 连接体问题	74
1. 内力公式	74
2. 弹簧连接体	81
3. 轻绳-弹簧突变问题	85
五. 板块模型	87
1. 水平板块	87
2. 倾斜板块	92
CHAPTER 5	100
曲线运动	100
一. 曲线运动	100
1. 认识曲线运动	100
2. 曲线运动的受力分析	100
二. 运动的合成与分解	101
1. 运动合成与分解	101
2. 小船过河问题	102
3. 速度合成的前提约束	104

三. 速度关联体问题	106
1. 刚性约束模型	106
2. 解析法	111
3. 瞬心法	115
4. 加速度关联问题 (拓展)	118
四. 平抛运动	123
1. 基本性质	123
2. 平抛砸面问题	124
3. 类平抛运动	130
五. 斜抛运动	132
1. 斜抛运动	132
2. 斜交分解	132
3. 包络线	135
CHAPTER 6	139
圆周运动	139
一. 圆周运动	139
1. 认识圆周运动	139
2. 向心力与向心加速度	139
3. 常见传动装置	139
二. 水平面内的圆周运动	141
1. 单物体水平圆盘模型	141
2. 多物体有绳同侧水平圆盘模型	142
3. 多物体有绳异侧水平圆盘模型	142
4. 多物体水平圆盘系统的质心判据	143
5. 多物体叠放水平圆盘问题	144
6. 圆心置物问题	145
三. 圆锥摆模型与转弯模型	150
1. 圆锥摆模型介绍	150
2. 转弯模型	155
四. 竖直面内的圆周运动	159
1. 轻绳模型	159
2. 轻杆模型	160
3. 脱轨问题	161
4. 过桥模型	166
五. 类竖直圆周运动	167
1. 斜面上等效重力分析	167
2. 恒定电场中等效重力分析	169
CHAPTER 7	173
天体运动	173
一. 万有引力定律	173
1. 认识万有引力	173
2. 重力与万有引力	173
3. 有关球体的万有引力问题	174
4. 开普勒三大定律	177
二. 卫星问题	179

TUTORCAT

1. 质量与密度问题	179
2. 多卫星物理量比较	183
三. 宇宙速度与变轨问题	186
1. 三大宇宙速度	186
2. 变轨问题	187
四. 多星问题	189
1. 多星互绕问题	189
2. 多星共绕追及问题	194
CHAPTER 8	196
功能关系	196
一. 动能与功	196
1. 动能与其时间变化率——功	196
二. 功率	196
三. 动能定理	199
四. 特殊力做功	201
1. 摩擦力做功	201
2. 变力做功	206
五. 机车启动问题	209
1. 以恒定功率启动	209
2. 以恒定加速度启动	210
六. 机械能守恒定律	214
1. 保守力与势能	214
2. 机械能守恒定律	215
七. 功能关系与能量守恒	218
1. 能量守恒定律	218
2. 功能关系	218
八. 能量观点的综合运用	220
1. 多物体关联问题	220
2. 能量图像问题	223
九. 弹簧振子问题	225
1. 基础弹簧振子问题	225
2. 弹簧振子模型拓展	227
十. 传送带模型	230
1. 分析思路	230
2. 能量角度分析	230
3. 水平与倾斜传送带模型	230
4. 划痕长度问题	233
CHAPTER 9	236
动量	236
一. 动量	236
1. 定义与特性	236
2. 力 — 质点动量的时间变化率	236
二. 动量定理	236
1. 冲量	236
2. 动量定理	237

3. 流体冲力问题	239
4. 动量图像问题	242
三. 动量守恒定律	242
1. 定理内容	242
2. 系统动量守恒的条件	242
3. 动量守恒的应用	243
4. 动量守恒的积分形式	244
四. 碰撞问题	245
1. 碰撞现象	245
2. 弹性碰撞 (Elastic Collision)	246
3. 非弹性碰撞 (Inelastic Collision)	250
4. 非对心碰撞 (拓展)	254
五. 质心运动定理	255
1. 质心 (Center of mass)	255
2. 质心运动定理	256
3. 质心系为零动量参考系	257
4. 两体系统在质心系中的镜像运动	257
5. 两体系统的运动分解与柯尼希定理	258
六. 类碰撞模型	260
1. 人船模型	260
2. 轨迹方程问题	262
3. “爆炸”模型	267
4. 小球 — 圆弧模型	268
5. 子弹打木块模型	269
6. 弹簧振子模型	273
七. 柯尼希定理的应用与恢复系数	281
1. 柯尼希定理回顾	281
2. 恢复系数	283
八. 多次碰撞问题	286
1. 碰撞递推法	286
2. 利用质心运动定理	288

CHAPTER 1

微积分简介

高中物理经常研究两类问题：

- (1) 已知物理量随时间或位置的变化规律，求某一时刻的**瞬时变化率**；
- (2) 已知每一微小过程中的变化，求整个过程的**累积结果**。

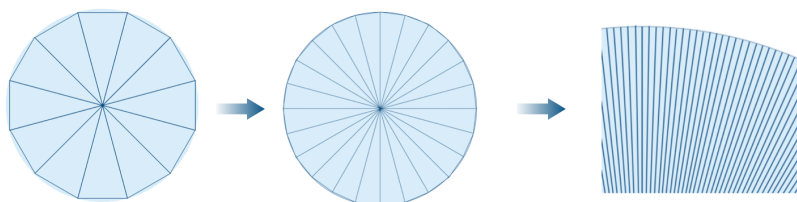
前一类问题由导数解决，后一类问题由定积分解决。二者共同构成高中物理中常用的微积分工具。

一. 微积分的核心思想

微积分处理复杂问题的基本思路可以概括为：

分割 → 近似 → 求和 → 取极限

将一个复杂的整体过程划分为许多微小过程。在每个足够小的区间内，变化规律往往可以近似简化；求出各微小过程的贡献并累加，再令分割无限细，便可得到精确结果。



微分与积分

微分 即将整体微元化，关注局部的微小变化；

积分 即将微元整体化，关注这些微小变化的累积结果。

二. 微元与导数

1. 微元的定义

微分符号 在微积分中，符号 d 称为微分符号。 dx 、 dt 应分别作为一个整体理解，表示变量 x 、 t 的微分。

从增量到微分 当自变量 x 由 x 变为 $x + \Delta x$ 时， Δx 表示自变量的实际增量；相应地，函数 $y = f(x)$ 的实际增量为

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

当 Δx 很小时，将自变量的微小变化 Δx 记作 dx ，并把函数增量 Δy 近似记作 dy

理解 上述对微元的定义在数学上是不严谨的，只是为了辅助读者理解这一概念，不影响我们后续的应用。

如何理解 dx 在高中物理的微元法中，可以把 dx 直观理解为：

将研究区间无限细分后得到的微小位移区间

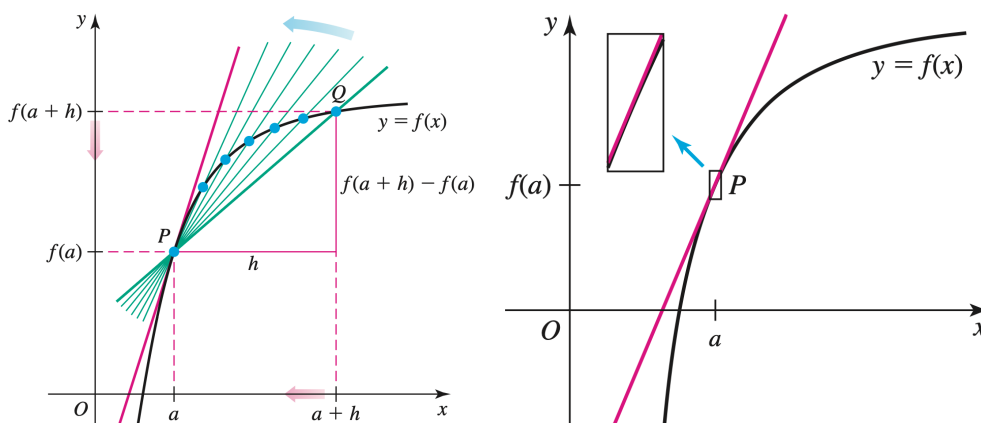
类似地：

dt	微小时间间隔
dv	速度的微小变化
dW	微小过程中力所做的功

2. 导数

直观理解 导数用于描述函数在某一点的**瞬时变化率**，其几何意义是函数图像在该点的切线斜率。

要求函数 $y = f(x)$ 在 $x = a$ 处的导数，即不断选取两个距离更近的点之间割线的斜率做逼近，



将该点导数记做 $f'(a)$ ，则 $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ ，式中“ $\lim_{h \rightarrow 0}$ ”意为 h 趋向于 0。

导数的微分表达 观察导数的表达式，其中分母即为 P 点处的 dx ，分子即为该点处的 dy ，因此导数的另一种形式为

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

理解 导数的微分形式来源于差商的极限，不能在定义时简单理解为两个普通的有限变化量直接相除。不过在后续运算中，这种形式具有很强的直观性和可操作性，当成常规的分式处理即可。

当取 $\Delta x = dx$ ，且变化范围很小时，函数的实际增量 Δy 可用微分 dy 近似

$$\Delta y \approx dy = f'(x)\Delta x$$

三. 定积分初步

应对变力做功，需累加时，我们已经知道需要进行微元处理。下面学习定积分，实现对微元的累加。

1. 定积分——微元法的数学实现步骤

STEP 1 分割构建微元 以变速运动路程、变力做功等问题为例，将研究区间（时间、位移区间等）分割为无数微小区间。微小区间内，“变化量”近似恒定，作为对应“微元”，例如：

变速运动 极短时间 dt 内，速度近似不变，可认为微小路程微元 $dx = v(t)dt$ ；

变力做功 极短时间 dt 内，外力近似不变，可认为微小功微元 $dW = F(x)dt$ 。

STEP 2 求和近似 将所有微元量相加，得到近似的总量；

例如 路程 $x \approx \sum v(t)dt$ ；功 $W \approx \sum F(x)dx$ 。

STEP 3 取极限 当微元的间隔趋近于 0 时，求和的结果就趋近于精确值，此时的和就定义为定积分，即

$$\text{例如 } x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum v(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt; W = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum F(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx.$$

公式表达 定积分的一般表达式为 $\int_a^b f(x)dx$ ，下面对其中参数进行详解：

(1) $\int$ ：积分号，来自“Summa”首字母“S”拉长变形而来，象征求和，对微元进行累加。

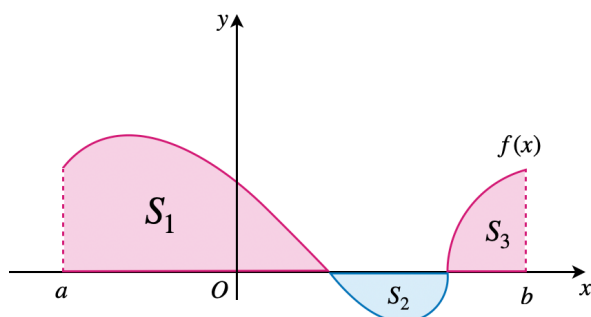
(2) a 和 b ：分别为积分的上限和下限，它们确定了积分的区间，即研究对象的范围。在物理问题中， a 和 b 通常对应着过程的起始和结束状态，例如时间区间的起始时刻和结束时刻。

(3) $f(x)$: 被积函数, 表示在积分上下限内, 与自变量 x 相关的变化量的规律。在物理中, 被积函数可以是速度、力、加速度等物理量关于时间或位移的函数。

(4) dx : 前文中提到的微分, 它表示将积分区间分割成的微小间隔。

2. 定积分的几何意义

在平面直角坐标系中, 函数 $y = f(x)$ 的图像与 x 轴以及直线 $x = a$ 、 $x = b$ 所围成的曲边梯形的面积, 就等于函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 。



(1) 当 $f(x) \geq 0$ 时, 定积分为曲边梯形的面积;

(2) 当 $f(x) \leq 0$ 时, 表示面积的负值, 如上图所示, 该定积分的值应为 $|S_1 - S_2 + S_3|$ 。

CHAPTER 2

运动学

一. 质点

1. 质点的定义

质点 在研究物体的运动规律时，如果把物体看作一个**没有大小和形状、但具有质量的点**，就称这个理想化的模型为质点。

2. 可以看作质点的情况

- (1) 物体尺寸远小于研究的运动距离（研究地球公转时，可视地球为质点）；
- (2) 只关注物体的整体运动，不考虑各部分运动差异（研究飞机飞行速度时，飞机可视为质点）；
- (3) 物体上各点运动情况完全相同（木箱平动时可视为质点）。

理解 质点不是实际存在的物体，而是一种理想化模型，在研究运动时，只要物体的大小和形状对结果影响不大，就可以把它看作质点。这种简化方法能帮助我们快速抓住运动的本质。

思考 研究地球自转时，可将地球视为质点吗？

答案 不能，需要关注地球各部分的转动差异（如不同纬度的线速度），地球的大小和形状不能忽略，不满足质点的条件。

二. 参考系

1. 参考系的定义

定义 在描述物体运动时，选作参考的假定不动的物体。

2. 参考系的性质

任意性 参考系的选取可以是任意物体；

同一性 比较不同物体运动须采用同一参考系。

3. 选取原则

尽量选使运动描述更简明的参考系（通常选地面这一静止不动的物体作为参考系）。

理解 研究任何物体的运动时都要明确参考系，选取不同的参考系，同一物体的运动状况可能会不同，因此我们常说：运动是绝对的，静止是相对的。

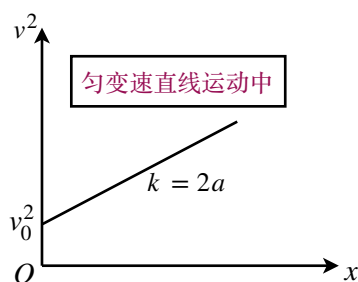
三. 三大运动学图像

1. 位置-时间图像

图像参数

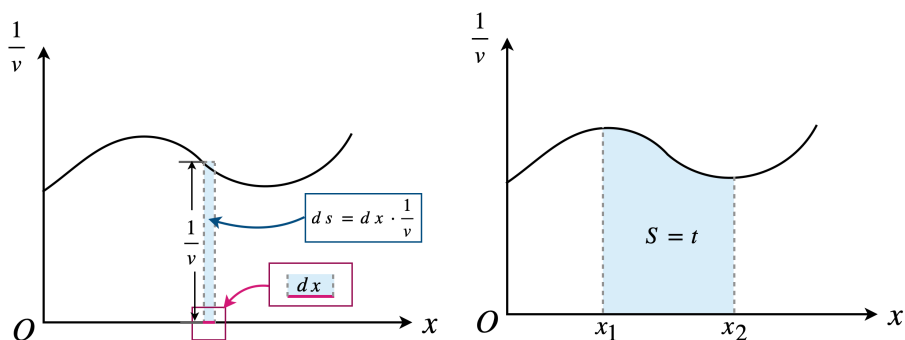
横坐标 t 表示时刻。

纵坐标 x 表示物体在某一时刻的位置。



3. $\frac{1}{v} - x$ 图像

面积的物理意义



理解 如左图所示，取面积微元则有 $ds = \frac{1}{v} dx = \frac{dt}{dx} dx = dt \Rightarrow \int ds = \int dt = t$

故图像与坐标轴围成的面积等于运动时间。如右图所示，图中阴影部分的面积 S 等于物体从 x_1 到 x_2 运动所用时间 t 。

斜率的物理意义 $\frac{d(1/v)}{dx} = -\frac{1}{v^2} \frac{dv}{dx} = -\frac{a}{v^3}$ ，因此 $a = -v^3 \frac{d(1/v)}{dx}$ 。若 $\frac{1}{v} - x$ 图像是斜率为 k 的直线，则

$$a = -k v^3。$$

例如 当图像斜率 $k < 0$ 且速度逐渐增大时，加速度也逐渐增大。

4. $a - x$ 图像

面积的物理意义 同上述分析过程，设物体在 x_1 、 x_2 处速度分别为 v_1 、 v_2 ，面积微元

$$ds = a dx = \frac{dv}{dt} dx = \frac{dx}{dt} dv = v dv \Rightarrow \int ds = \int_{v_1}^{v_2} v dv = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2}$$

故图像与坐标轴围成的面积等于 $\frac{v_2^2 - v_1^2}{2}$ 。

5. $\frac{x}{t} - t$ 图像

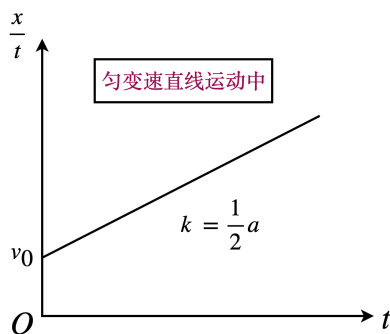
对于这个图像，我们仍然先看一下斜率的表达式 $k = \frac{d(\frac{x}{t})}{dt} = \frac{vt - x}{t^2}$

这个表达式在一般情况中物理意义并不明显，但在匀变速直线运动中，分子部分中的 vt 相当于一段以速度 v 匀速运动的一段位移， x 相当于物体从初速度 v_0 运动到末速度 v 的位移，故

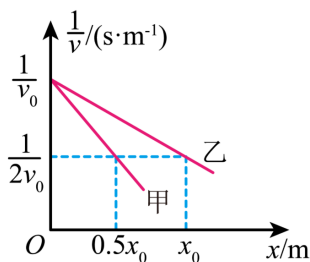
$$k = \frac{(v_0 + at)t - (v_0 t + \frac{1}{2} at^2)}{t^2} = \frac{1}{2} a$$

由此我们可知，匀变速直线运动的 $\frac{x}{t} - t$ 图像为一条倾斜的直线，斜率为 $\frac{1}{2} a$ ，设直线解析式为

$\frac{x}{t} = \frac{1}{2} at + b$ ，对照 $x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$ ，可得 $b = v_0$ ，故 $\frac{x}{t} - t$ 图像如下图所示：



EXAMPLE 1 甲、乙两物体沿 x 轴正方向做直线运动，甲、乙以速度 v_0 先后经过 O 点，之后它们运动的 $\frac{1}{v} - x$ 图像如图所示，则甲、乙两物体速度从 v_0 增加到 $2v_0$ 的过程，下列说法中正确的是



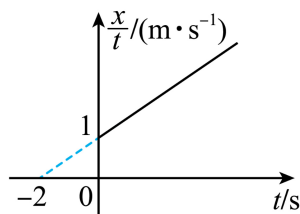
- A. 两物体加速度减小
B. 两物体加速度增大
C. 两物体运动时间可能相等
D. 两物体可能相遇

解析

对于AB， $a = -k v^3$ ，两物体的图像均为向下倾斜的直线，所以 $k < 0$ ，因此随着速度 v 增大， v^3 增大，所以两物体的加速度均逐渐增大。故A错误，B正确。

对于C，根据面积可知乙的时间大于甲的时间，错误；对于D，从 v_0 增加到 $2v_0$ 的过程中经过相等位移甲运动时间小于乙运动时间，且甲先经过 O 点，故不可能相遇，错误。综上，答案为B。

EXAMPLE 2 一质点沿 x 轴正方向做直线运动，通过坐标原点时开始计时，其 $\frac{x}{t} - t$ 图像如图所示，则



- A. 质点做匀加速直线运动，初速度为 1.0 m/s
B. 质点做匀加速直线运动，加速度为 0.5 m/s^2
C. 质点在 1 s 末速度为 1.5 m/s
D. 质点在第 1 s 内的位移大小为 1 m

解析

对于AB，由前文分析知， $v_0 = 1 \text{ m/s}$ ， $a = 1 \text{ m/s}^2$ ，故A正确，B错误；对于CD，不难证明CD错误。综上，答案为A。

对于A，平均速度等于时间中点瞬时速度，故物体在0.5s末的速度一定为6.4m/s；对于BCD，若物体在第3s时候恰好停止，则 $\frac{x_1}{x_3} = \frac{5}{1} < \frac{6.4}{0.4}$ ，预测比值小于实际比值，设第3秒内运动时间为 t ，利用逆向思维列得

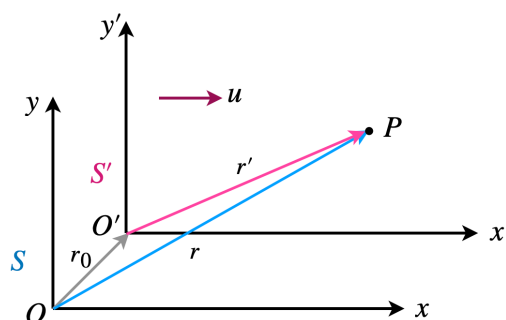
$$\frac{1}{2}at^2 = 0.4\text{m}, \quad \frac{1}{2}a(t+2)^2 - \frac{1}{2}a(t+1)^2 = 6.4\text{m}$$

解得 $a = 3.2\text{m/s}^2$ ，故物体在第2.5s时停止运动，所以在第2.5s末的速度为零，由逐差法得到，在第2s内的位移为 $x_2 = x_1 - at^2 = 3.2\text{m}$ 。综上，答案为AD。

九. 参考系变换

物体的位置和速度必须相对于某个参考系描述。同一物体相对于不同参考系，其位置和速度一般不同；若两个参考系之间存在相对加速度，则物体在两参考系中的加速度也不同。

注意 下面讨论两个坐标轴始终保持平行、彼此只作平动而不发生转动的参考系。转动情况较为复杂，在曲线运动章节有相关介绍。



如上图所示，参考系 S' 相对于参考系 S 沿 x 轴以速度 u 平移。对于质点 P ，其在 S 系中位置矢量为 r ，在 S' 系中位置矢量为 r' ，而 S' 系原点相对于 S 系原点的位置矢量为 r_0 ，从图像上看，三者满足

$$r = r' + r_0 \Rightarrow \Delta r = \Delta r' + \Delta r_0$$

而位置矢量的变化量（初位置至末位置的矢量）就是物体的位移，记 P 点在 S 系、 S' 系的位移分别为 x 、 x' ， S' 系相对于 S 系的位移为 x_0 ，则有

$$x = x' + x_0$$

对上式求导得 $v = v' + u$ ，再次求导得 $a = a' + a_0$ 。

相对运动语言表述 假定地面为 S 系，相对于地面的 x 、 v 、 a 我们称为绝对量，相对于 S' 系的称为相对量， S' 系相对 S 系的称为关联量，则有结论

$$\text{绝对量} = \text{相对量} + \text{关联量}$$

典例1 小车相对地面速度为 $v_{\text{车地}}$ ，人相对车的速度 $v_{\text{人车}}$ ，则人相对地面速度为 $v_{\text{人地}}$ 为

$$v_{\text{人地}} = v_{\text{人车}} + v_{\text{车地}}$$

典例2 在空中某处以初速度 v_0 竖直向上抛出一个球 A ，与此同时，在球 A 正上方 H 处有一球 B 自由释放下落，求球 A 和球 B 在空中相遇的时间。已知重力加速度为 g ，不计空气阻力，相遇时两球均未落地。

分析 传统方法需讨论三种情况：（1）球 A 上升过程中二者相遇；（2）球 A 上升又下降后相遇；（3）球 A 在下降过程中相遇，且在抛出点之下。读者感兴趣可自行尝试，下面给出变换参考系解法。

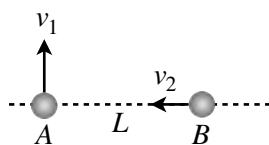
选择 B 球为参考系，竖直向下为正方向， A 相对于 B 的初速度为，记 A 对地为 v_A ， B 对地为 v_B

$$v_{AB} = v_A - v_B = -v_0 - 0 = -v_0, \quad a_{AB} = a_A - a_B = 0$$

所以，以 B 为参考系，球 A 以 v_0 的速度大小，作竖直向上的匀速运动。因此，相遇时间 t 为

$$t = \frac{H}{v_0}。$$

典例3 光滑水平地面上相距 L 的两球 A 和 B ，现在同时以 v_1 、 v_2 抛出两球，方向如图所示。求两球相距最近的时刻 t ，以及最短的距离。



分析法一（以地面为参考系）以 A 原点向右和向上建立直角坐标系，则 t 时刻 A, B 两球的位置分别为 $x_A = 0, y_A = v_1 t; x_B = L - v_2 t, y_B = 0$ ，所以双方的距离为

$$d^2 = (v_1 t)^2 + (L - v_2 t)^2 = (v_1^2 + v_2^2)t^2 - 2Lv_2 t + L^2$$

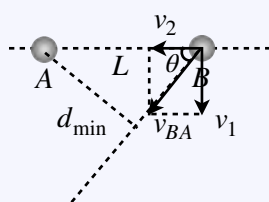
显然这是个关于 t 的二次函数，当 $t = \frac{v_2}{v_1^2 + v_2^2}L$ 时，有

$$d_{\min} = \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}L$$

法二（以 A 球为参考系）则 B 球相对 A 球做匀速直线运动，设 B 相对 A 的速度为 v_{BA} ，易得

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_{BA}$$

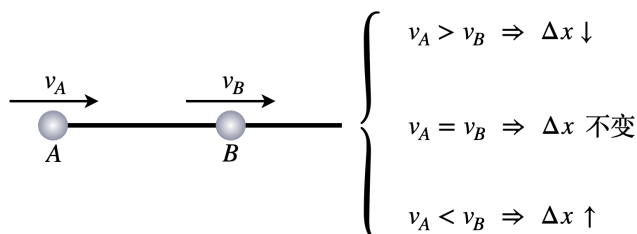
可得 $|\vec{v}_B| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ ，方向指向左下，如图所示



可得 $d_{\min} = L \sin \theta = \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}L$, $t = \frac{L \cos \theta}{v} = \frac{v_2}{v_1^2 + v_2^2}L$ 。

十. 追击相遇问题

两物体是否相遇（或追上）的关键在于二者是否有距离差 Δx ，而距离改变的关键在于二者的速度差 Δv ，假定 A 球追击 B 球，二者间距离随速度差 Δv 变化如下图所示：



因此，两物体共速时，物体间距 Δx 达到最大 / 最小值，故解决追击相遇问题的关键在于确定二者的共速结点，进一步确定 Δx 大小的变化情况，从而求得物体间是否相遇或追上（ $\Delta x = 0$ 时）

解决此类题型常见有如下四种方法

图像法 利用二者 $v-t$ 图像与坐标轴围成的面积差进行直观分析。

运动学公式法 利用速度相等时间距取极值这一临界条件入手分析，分别计算二者共速时刻走过的位移，判断二者能否相遇。

函数分析法 利用运动学公式，将二者位移表达式列出，做差，分析 Δx 的零点个数。

举例 以上文中 A 球追 B 球为例，设初始间距为 x_0 ，两球初速度为 v_A, v_B ，则有

$$x_A = v_A t + \frac{1}{2} a_A t^2, x_B = v_B t + \frac{1}{2} a_B t^2 \text{ (正负号根据实际所设正方向代入计算)}$$

$$\Delta x = x_0 - (x_A - x_B) = x_0 - [(v_A - v_B)t + \frac{1}{2}(a_A - a_B)t^2]。$$

CHAPTER 3

静力学

一. 力学基础知识

1. 力的定义与矢量性

力的定义 能改变物体形状和运动状态的相互作用。

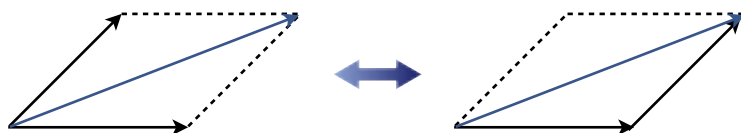
矢量性 力是矢量（既有大小又有方向），运算严格遵循平行四边形法则或三角形法则。

2. 力的合成与分解

合成法则 力的合成是用一个合力等效替代多个分力的过程，核心规则：

平行四边形法则 以两个分力为邻边作平行四边形，对角线代表合力（适合共点力的合成）；

三角形法则 将分力首尾相接，从第一个分力的起点到最后一个分力的终点的有向线段，即为合力（平行四边形定则的简化，更适合多力合成的递推）。



二力合成的取值范围 若两分力大小为 F_1 、 F_2 ，合力 F 的取值范围为 $|F_1 - F_2| \leq F \leq F_1 + F_2$ 。

同向共线时 合力最大 $F = F_1 + F_2$

反向共线时 合力最小 $F = |F_1 - F_2|$ （ $F_1 = F_2$ 时合力为0）

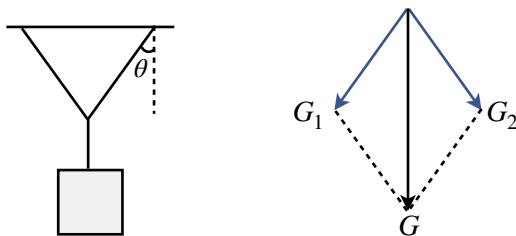
理解 已知分力求合力的过程，本质上是利用运算法则合成后的解三角形问题，高中阶段聚焦共点力的简单合成，核心是掌握上述两个运算法则，计算复杂合力情况很少，无需死记复杂模型。

分解法则 力的分解是将一个合力等效拆分为多个分力的过程，仍遵循平行四边形法则或三角形法则，在实际应用中，两类分解思路最常用：

Case1 按力的效果分解（优先体现物理意义）

核心逻辑 根据力对物体的实际作用效果（如拉伸、压缩、偏转等）确定分力方向；

示例 “Y”形绳悬挂重物，如下图所示：



分析 对重力 G 进行分解，其效果是使两根绳子产生拉伸形变。故将 G 沿两根绳的方向分解为两个分力 G_1 、 G_2 （由于左右情况对称，故 $G_1 = G_2$ ），构成平行四边形。

Case2 按正交分解（优先服务于计算）

核心逻辑 建立直角坐标系（通常选水平 + 竖直、或运动方向 + 垂直运动方向），将力分解为 $\vec{F}_x$ 、 $\vec{F}_y$ 。

好处： 便于运用平衡条件（坐标轴方向上合力为0 $\Leftrightarrow \sum \vec{F}_x = 0$ 、 $\sum \vec{F}_y = 0$ ）或应用 $F = ma$ 计算。

对于绳上的弹力

特性 绳对物体的拉力 T (tension) 方向总是沿绳, 且指向绳子收缩的一侧;

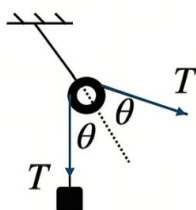
弹力规律 同一根理想轻绳上, 若绳无分支、滑轮光滑、绳与接触处无摩擦, 则张力大小处处相等。

证明 对任意一小段理想轻绳, 由于其质量被理想化为零, 若加速度有限, 则该小段所受合力必须为零。因此该绳段两端拉力大小相等。

a. 绳子绕过滑轮后仍为一条绳子, 遵循同绳同力, 若一条绳打结后有分支, 应当做多条绳处理。

b. 任何轻质物体 ($m = 0$) 不一定处于平衡状态的。由牛顿第二定律有 $F = ma$, 因为 $m = 0 \Rightarrow F = 0$, 要注意的是: 这个轻质物体的加速度可以不为零, 但合力必然为零。

等角推论 一轻绳绕过拴在另一轻绳上的轻质滑轮时, 两段绳子张力相同, 且与固定绳的夹角相等, 图示如下, 其中滑轮两侧绳子与图中虚线夹角均为 θ 。



证明 显然, 绕过滑轮的绳子两端的拉力大小相等, 设为 T 。这里对滑轮受力分析, 滑轮整体受到三个力的作用: 上方固定绳的拉力 F (沿上方绳子方向, 即图中虚线向上的反方向) 和两个拉力 T 。因为滑轮 $m = 0$, 因此所受的合外力必然严格为零, 则有

$$\vec{F} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0 \Rightarrow \vec{F} = -(\vec{T}_1 + \vec{T}_2)$$

可知, $\vec{F}$ 必须与下方两段绳子拉力的合力 $\vec{T}_1 + \vec{T}_2$ 大小相等、方向相反, 且作用在同一直线上, 那么这条虚线就必然平分下方两段绳子的夹角。综上所述, 滑轮两侧绳子与虚线的夹角必然相等, 均为 θ 。

EXAMPLE 1 下列对图中弹力有无的判断, 正确的是

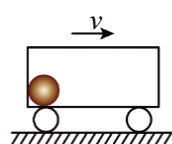


图1

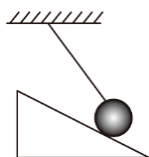


图2

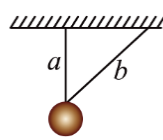


图3

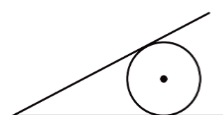


图4

- A. 小球随车厢(底部光滑)一起向右做匀速直线运动, 则车厢左壁对小球有弹力
- B. 小球被轻绳斜拉着静止在光滑的斜面上, 则绳对小球有弹力
- C. 小球被 a 、 b 两轻绳悬挂而静止, 其中 a 绳处于竖直方向, 则 b 绳对小球有拉力
- D. 小球静止在光滑的三角槽中, 三角槽底面水平, 倾斜面对球有弹力

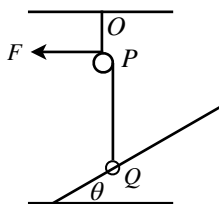
解析

对于A, 底部光滑无摩擦, 水平方向加速度为0, 没有任何力的作用, 错误;

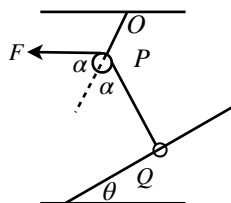
对于B, 若无弹力, 则只受重力和斜面支持力的作用, 二力不共线不可能平衡, 正确;

对于C, 若 b 绳有拉力, 则水平方向上合力不为0, 错误; 对于D, 同样进行假设分析, 可得D错误。

EXAMPLE 2 如图所示, 在竖直平面内固定一直杆, 杆与地面间的夹角为 θ , 将轻环套在杆上。不计质量的滑轮用轻质绳 OP 悬挂在天花板上, 另一轻绳通过滑轮系在环上, 不计所有摩擦。现向左缓慢拉绳, 当环静止时, 与手相连的绳子水平, 求此时绳 OP 与天花板之间的夹角 α 的大小。

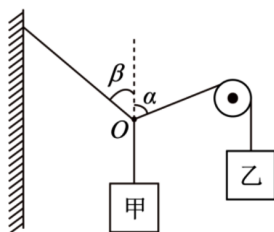
**解析**

由于是轻环，因此其合力为0，它只受拉力和杆的支持力，因此二力平衡，二者必须共线，因此平衡时 PQ 垂直于杆。同时根据等角定理， OP 平分 $\angle FPQ$ ，可知平衡状态如下图所示

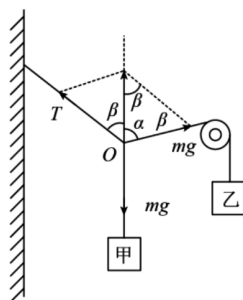


由几何关系可得 $\angle FPQ = 90^\circ + \theta$ ，因此 $\alpha = \frac{1}{2}\angle FPQ = 45^\circ + \frac{\theta}{2}$

EXAMPLE 3 如图，悬挂甲物体的细线拴牢在一个不可伸长的轻质细绳上 O 点处，绳的一端固定在墙上，另一端通过光滑定滑轮与物体乙相连。甲、乙两物体质量相等。系统平衡时， O 点两侧绳与竖直方向的夹角分别为 α 和 β 。若 $\alpha = 70^\circ$ ，则 β 等于

A. 45° B. 55° C. 60° D. 70° **解析**

甲物体是拴牢在 O 点， O 点左右不可视为同一条绳，对物体受力分析如图所示：



由于甲乙质量相等，故构成的封闭三角形顶角为 α ，底角相等均为 β ，则有 $180^\circ = \alpha + 2\beta$ ，解得 $\beta = 55^\circ$ 。

柔性连续体的张力问题（拓展）

在处理链条、圆环、通电线圈等柔性连续体时，我们无法总像处理刚体那样简单，或**整体隔离法部分例3**那样进行简单的整体受力分析（核心原因是只有恒定力场，我们总能找到垂直该场的方向不受恒定场力，从而使用整体法）。对于一般性求解其内部张力的问题，我们的核心思想是

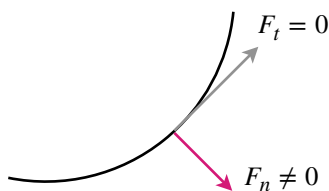
微元隔离与切向/径向正交分解

理解 沿绳方向（切向）决定张力是否变化；垂直绳方向（径向）决定绳子的弯曲。

根据受力特征，这类问题可以划分为两大核心模型：

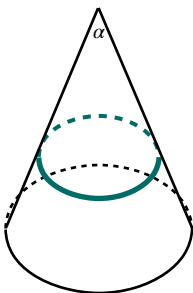
Case1 恒定张力模型（圆环类）

核心特征 连续体在切线方向上没有受到任何外力（或外力分力），只在径向受力。为了维持切向平衡，因此内部张力 T 处处相等（ $dT = 0$ ）。

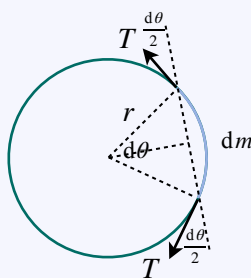


理解 由于此类题目一般为圆环类，我们任取圆心角微元 $d\theta$ ，利用小角度近似求出对应弧长部分张力的径向合力 $F'_n \approx T d\theta$ （常用结论），令其与外部径向力 F_n 平衡。下面我们来通过一道例题，展示 $F'_n \approx T d\theta$ 的由来，顺便帮助读者加深理解。

典例分析 如图所示，锥角为 α 的正圆锥体竖直放置在水平地面上，一质量为 m 且分布均匀的软绳水平套在圆锥体上，忽略软绳与锥体之间的摩擦力，试求软绳中的张力 T 的大小。



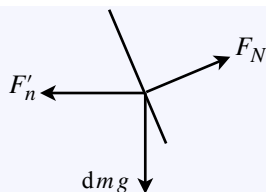
分析 俯视视角：如图，选取圆弧微元进行研究，其所对应圆心角为 $d\theta$



由于 $d\theta$ 很小，因此 $\sin \frac{d\theta}{2} \sim \frac{d\theta}{2}$ ，可得张力的径向合力： $F'_n = 2T \sin \frac{d\theta}{2} \approx T d\theta$ （这就是前文结论的由来）。

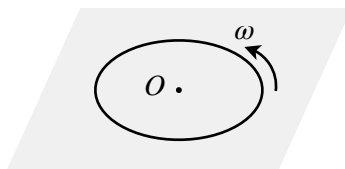
这段圆弧的质量 $dm = \frac{l}{2\pi r} m$ ，其中 $l = d\theta r$ ，因此 $dm = \frac{d\theta}{2\pi} m$ ；

正视角：如下图所示 $F'_n = F_N \cos \frac{\alpha}{2}$ ，其中 $F_N \sin \frac{\alpha}{2} = dm g$



因此 $T = \frac{mg}{2\pi \tan \frac{\alpha}{2}}$ 。

EXAMPLE 1 如图，现有一放在光滑水平面上质量为 m ，半径为 R 的匀质圆环，以角速度 ω 绕圆心 O 匀速旋转，试求圆环内部张力 T 的大小。

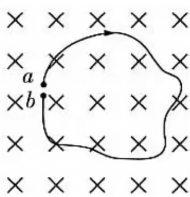


解析

这道题中径向力 F_n 其实并不存在，只不过物体有离心趋势，张力的径向合力 F'_n 应提供向心力，因此我们仍然选取微元进行分析 $dm = \frac{d\theta}{2\pi}m$ ，需要向心力 $dm\omega^2 R$ ，则有

$$F'_n = T d\theta = dm \omega^2 R = \frac{d\theta m \omega^2 R}{2\pi} \Rightarrow T = \frac{m \omega^2 R}{2\pi}$$

EXAMPLE 2 在光滑桌面上将长为 L 的柔软导线两端点固定在间距可忽略不计的 a 、 b 两点，导线通有图示电流 I ，处在磁感应强度为 B 、方向竖直向下的匀强磁场中，试求导线中的张力 T 的大小。

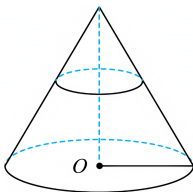


解析

本题中径向力 $F_n = BIdL$ ，向外侧，则有

$$F'_n = T d\theta = BIdL = BI(Rd\theta) \Rightarrow T = \frac{BIL}{2\pi}$$

EXAMPLE 3 如图所示，表面光滑的圆锥体固定在水平面上，底面半径为 R ，顶角为 60° 。有一个质量为 m 的弹性圆环，圆环的弹力与形变量之间的关系满足胡克定律，且圆环始终在弹性限度内，圆环处于自然状态时的半径为 $\frac{1}{8}R$ 。现将圆环套在圆锥体上，稳定时圆环于水平状态，且到底面的距离为圆锥体高线的 $\frac{3}{8}$ 。已知重力加速度为 g ，圆环的弹性势能 $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ （其中 k 为圆环的劲度系数， x 为圆环的形变量）。现将圆环从自然状态贴着圆锥体侧壁水平静止释放，则



A. 圆环的劲度系数 $k = \frac{mg}{2\pi^2 R}$

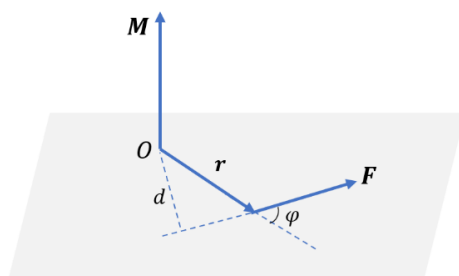
B. 圆环不会穿过圆锥体落向水平面

C. 下落过程中圆锥体对圆环的最小作用力为 $\frac{1}{4}mg$

力矩的定义 位矢与作用力的叉乘，即

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

其中， $\vec{M}$ 为力矩，是矢量的一种， $\vec{F}$ 为作用力， $\vec{r}$ 为位矢（从人为选定的 O 点指向力的作用点的矢量）



理解 “ $\times$ ”意为向量的叉乘运算。与点乘不同的是， $\vec{A} \times \vec{B}$ 叉乘运算结果是一个向量 $\vec{C}$ ，且 $\vec{C}$ 垂直于 $\vec{A}$ 、 $\vec{B}$ 所在的平面，三者方向遵循右手螺旋定则。在图中， $\vec{M}$ 即为 $\vec{r} \times \vec{F}$ 这个叉乘运算得到的新向量。

这些式子貌似有些不好理解，不过没关系，高中阶段我们无需掌握这种新型的矢量运算，了解即可。至于力矩的方向我们无需通过右手螺旋定则来确定，因为高中阶段用到力矩的场景不复杂，力的个数较少，我们只需直观的感受这个力会使物体有什么旋转趋势，从而判断力矩应该是相加或是相减即可。下面我们来介绍力矩的大小如何计算，为我们的定量分析做铺垫。

力矩的大小

$$M = rF \sin \varphi = Fd$$

其中， φ 为两个矢量的夹角， $d = r \sin \varphi$ 是力的作用线到 O 点的距离，称为**力臂**。

理解 类比杠杆原理，我们很容易就可以记住力矩的大小如何计算

由此可得，叉乘得到的向量模长遵循以下规律： $|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin \varphi$ 。

参考点 O 的任意性

由力矩的定义不难得出，力臂 d 的确定离不开 O 点的确定。因此，若 O 点不定，谈论力矩大小是无意义的。

O 点的确定原则 若物体处于平衡态，那么转轴 O 的选取是任意的，力矩均为0。

理解 取矩点不必是真实转轴，可以根据计算需要任意选取，一般选取未知力较多的作用线交点，因为穿过 O 点的力产生的力矩必然为0，计算时可忽略。

证明（选读） 假设有一个刚体，受到 n 个外力的作用。该物体处于受力平衡状态，即

$$\sum_i^n \vec{F}_i = 0$$

我们任意选取一个点 O 作为转轴。设第 i 个力 $\vec{F}_i$ 作用点的位矢为 $\vec{r}_i$ 。此时关于 O 点的合力矩为

$$\vec{M}_O = \sum_i^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i)$$

由于刚体处于转动平衡，所以 $\vec{M}_O = 0$ 。现在，我们任意选取空间中另一点 O' 作为新的转轴。设 O' 相对于 O 的位矢为 $\vec{R}$ 那么，第 i 个力的作用点相对于新转轴 O' 的新位矢就变成了

$$\vec{r}'_i = \vec{r}_i - \vec{R}$$

我们来计算关于新转轴 O' 的合力矩 $\vec{M}_{O'}$

$$\begin{aligned} \vec{M}_{O'} &= \sum_i^n (\vec{r}'_i \times \vec{F}_i) = \sum_i^n [(\vec{r}_i - \vec{R}) \times \vec{F}_i] \\ &\Rightarrow \vec{M}_{O'} = \sum_i^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) - \sum_i^n (\vec{R} \times \vec{F}_i) \end{aligned}$$

观察右边的两个式子，第一项 $\sum_i^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = \vec{M}_O$ ，第二项中由于 $\vec{R}$ 是个常矢量，因此可提到求和符号外，即

$\sum_i^n (\vec{R} \times \vec{F}_i) = \vec{R} \times \sum_i^n \vec{F}_i$ ，因为物体处于受力平衡，即合外力 $\sum_i^n \vec{F}_i = 0$ ，因此，第二项

$$\sum_i^n (\vec{R} \times \vec{F}_i) = 0$$

由此得出结论 $M_{O'} = M_O = 0$ ，即任意两点转轴计算得到的力矩都相等，且均为0。

物体平衡条件 现在我们很容易理解：只有合力为0是不足以保证物体平衡的。完整的表达应为

合外力为 0（受力平衡）、合力矩为 0（力矩平衡）

力矩平衡对三力汇交原理的证明

原理回顾 一个刚体仅受三个共面、非平行力而平衡时，三个力的作用线必汇交于一点。

理解 设其中两个力的作用线交于点 B 以 B 为取矩点时，这两个力的力矩均为零。为了使刚体满足力矩平衡，第三个力的作用线也必须经过 B 因此：

三力平衡 $\Rightarrow$ 三力作用线汇交

力矩平衡的应用

很多静力学题目不存在“转动趋势”，最多利用正交分解即可解决，无需要 $\sum \vec{M} = 0$ 作为条件。部分静力学题目存在着“转动趋势”。则需要利用“三力汇交”或力矩平衡来解决。

典例分析 如图，一根质量为 m 、长为 L 的均匀刚性木杆，下端 O 铰接在竖直墙壁上，上端 A 用一根水平轻绳拉住，使木杆与竖直墙壁的夹角保持为 θ 。求水平轻绳的拉力 T 大小。



分析法一 杆在 O 点受到墙壁铰链的弹力，该力大小和方向均未知，因此选取 O 点为转轴，未知力的作用线直接穿过 O 点，其力臂为 0，产生的力矩为 0，从而在计算中避开该力。杆仅受另外两个产生力矩的力

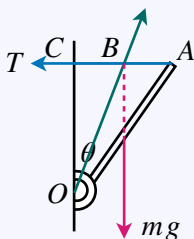
重力 mg ：作用在杆的中点，使其有顺时针转动趋势。由几何关系得其力臂 $d_1 = \frac{1}{2}L \sin \theta$ ；

绳子拉力 T ：作用在 A 点，使其有逆时针转动趋势。由几何关系得其力臂 $d_2 = L \cos \theta$ 。

根据 $\sum \vec{M} = 0$ 可得

$$\frac{1}{2}mgL \sin \theta = TL \cos \theta \Rightarrow T = \frac{1}{2}mg \tan \theta$$

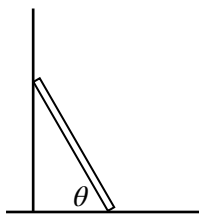
法二 如下图所示，易知三力延长线交于一点，记为 B 点。因此我们可以确定铰链施加的力的方向



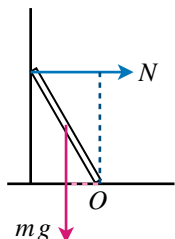
由于三力最终还可构成封闭的三角形，因此结合几何关系我们可以得到

$$\tan \angle OBC = \frac{T}{mg} \Rightarrow T = \frac{1}{2}mg \tan \theta$$

EXAMPLE 1 如图所示，水平放置半径为 R 的光滑弧槽内，有两个半径均为 $(\sqrt{2}-1)R$ ，重力分别为 G_1 、 G_2 的小球 A 和 B ，则平衡时槽面圆心 O 与 A 球球心的连线与竖直方向的夹角 α 满足

**解析**

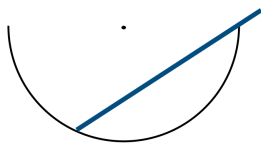
如图，选取下端支点为转轴，地面的支持力 N' 和摩擦 f 的力矩无需考虑



平衡条件: $f = N$ 、 $mg = N'$ (受力) $mg \frac{L}{2} \cos \theta = NL \sin \theta$ (力矩), 临界条件: $f = \mu N'$

联立解得 $\tan \theta = \frac{1}{2\mu}$ 。三力汇交的方法请读者自行尝试完成。

EXAMPLE 3 如图所示，一个完全光滑、半径为 R 的半球形碗水平固定放置，一根表面光滑的均质金属棒静止放在碗中达到平衡状态。已知平衡时金属棒在碗中的长度为 L ，金属棒在碗中的长度大于在碗外的长度，且金属棒所受到的力的作用线均交于一点，则金属棒的长度为



A. $\frac{2L^2 - R^2}{L}$

B. $\frac{3L^2 - 5R^2}{L}$

C. $\frac{4L^2 - 8R^2}{L}$

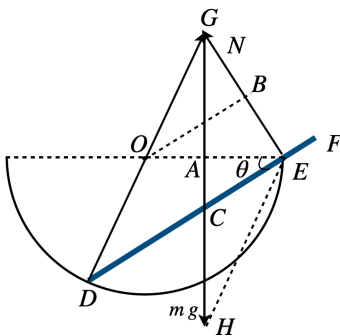
D. $\frac{5L^2 - 12R^2}{L}$

解析

根据题目信息，三力交于一点，设重力为 mg ，碗对杆右侧的弹力为 N ，对杆进行受力分析：

选定转轴点为 O ，如图作 OB 平行于杆，由于 DG 方向的力不提供力矩，力矩平衡列得

$$mg \times OA = N \times OB$$



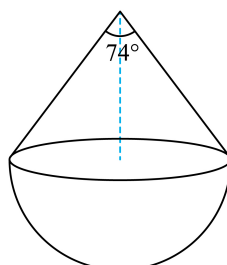
依题意得 $\triangle GDE$ 为直角三角形，且 $OE = OD = R$ ，推得 O 为 GD 中点，故 $OB = \frac{L}{2}$ ，设杆长为 x ， $\angle OEC = \theta$ ，易知 C 为 DF 中点， $CE = L - \frac{x}{2}$ ， $OA = OE - AE = R - (L - \frac{x}{2}) \cos \theta$ ，且 $\cos \theta = \frac{L}{2R}$

由于重力和两个支持力共点力平衡，三者可以构成封闭三角形 GEH ，易知 $\angle GFH = \theta + 90^\circ$ ， $\angle GHE = 90^\circ - 2\theta$ ，由正弦定理得

$$\frac{mg}{\sin(\theta + 90^\circ)} = \frac{N}{\sin(90^\circ - 2\theta)}$$

联立上式解得 $\frac{4L^2 - 8R^2}{L}$ 。综上，答案为C。

EXAMPLE 4 有一“不倒翁”，形状可以简化成由半径为 R 的半球体与顶角为 74° 的圆锥体组成，如图所示，它的重心在对称轴上。为使“不倒翁”在任意位置都能恢复竖直状态，已知 $\sin 37^\circ = \frac{3}{5}$ ， $\cos 37^\circ = \frac{4}{5}$ ，则该“不倒翁”的重心到半球体的球心的距离必须大于



- A. 0 B. $\frac{3R}{5}$ C. $\frac{4R}{5}$ D. $\frac{3R}{4}$

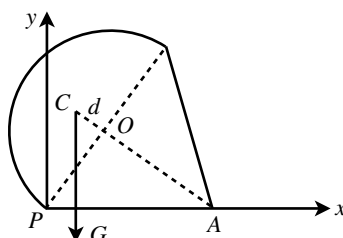
解析

要让“不倒翁”在任意位置都能恢复竖直状态，最极端的临界情况就是当它完全侧翻（圆锥体的母线贴着地面时）。若在这种最极端的情况下，重力依然能产生使其滚回半球面的恢复力矩，显然它在任何位置就都能不倒。先把圆锥的参数处理一下，设半球体半径为 R ，这也是圆锥底面的半径

$$\text{圆锥的高: } h = \frac{R}{\tan 37^\circ} = \frac{4R}{3};$$

$$\text{圆锥的母线长: } L = \sqrt{R^2 + h^2} = \frac{5R}{3};$$

当圆锥体侧面贴地时，我们记圆锥底面边缘与地面的这个支点为 P ，并设为坐标原点



此时，圆锥的顶点 A 落在 x 轴正半轴上，坐标为 $(\frac{5}{3}R, 0)$ ，几何关系知圆心 O 坐标为 $(\frac{3R}{5}, \frac{4R}{5})$

不倒翁的中心轴沿直线 AO 方向。重心 C 必须在 O 点下方，设 C 到球心 O 的距离为 d

若以 P 为转轴，能够自发的转回来，需要逆时针的旋转，只能靠重心处重力的力矩。直观感受一下， C 处的重力作用线应在 P 左侧才对。因此临界情况为恰好穿过 P 点，即 $x_C = 0$ ，即

$$x_C = x_O - d \cos 37^\circ = 0 \Rightarrow d = \frac{3R}{4}$$

因此D正确。

3. 动态平衡问题

动态平衡问题指准静态过程（系统变化足够缓慢，每一时刻都可近似视为平衡）中，物体受力随几何构型（如角度、绳长变化）持续改变的平衡问题。我们的核心研究内容是

各力的大小如何随角度、距离等几何量的变化而变化。

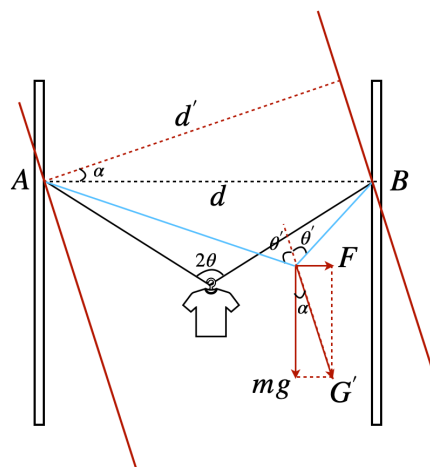
常用方法分为两类：解析法与图解法。

图解法 将力平移并首尾相接，构成封闭的矢量图形，通过边长变化判断力的变化。分为三类

结论 观察 T 的解析式得到，在所挂重物不变的情况下， T 大小只与绳长 l 和杆间距 d 有关；

当 $d \uparrow \rightarrow \cos \theta \downarrow \rightarrow T \uparrow$ （绳越“绷直”，张力越大）；而移动悬挂点 A 、 B 时 $\rightarrow d$ 、 l 不变 $\rightarrow T$ 不变。

有风晾衣杆模型 在上述模型的基础上，假定悬挂点 A 、 B 高度相同，现重物还受水平恒力 F 。



绳间张角的变化情况 张角 2θ 逐渐减小。

分析法一（等效重力法） 将重物受到的风力 F 和重力 mg 合成为等效重力 G' ，此时问题等价于“无风时，等效重力 G' 作用下的晾衣架”。如图所示，两杆等效水平间距

$$d' = d \cos \alpha \quad (\text{因 } G' \text{ 倾斜, 水平间距缩小})$$

两杆等效间距 $d' < d$ ，故 $\sin \theta' = \frac{d'}{l} < \sin \theta$ ，绳间张角变小。

法二（椭圆轨迹法） 由于绳长 l 不变，因此悬挂点 A 、 B 为椭圆焦点（椭圆的第一定义），挂钩轨迹为椭圆，利用焦点三角形性质，椭圆短轴顶点处，挂钩与两焦点的连线夹角最大。挂钩初始时刻位于椭圆短轴顶点处，故当风力增大，挂钩向右移动，绳间张角减小，故 $\theta' < \theta$ 。借此我们可作出推广

- (1) 若初始在短轴左侧 $\rightarrow \theta'$ 先增大再减小（到达短轴顶点时达最大值）；
- (2) 若初始在短轴右侧 $\rightarrow \theta'$ 持续减小。

绳子张力 T 的变化情况

对于绳子张力 T 的大小变化：设 G' 与 mg 之间夹角为 α ，则有

$$d' = d \cos \alpha = \frac{dG}{G'}, \quad T = \frac{G'}{2 \cos \theta'} = \frac{G'l}{2\sqrt{l^2 - d'^2}} = \frac{G'}{2} \frac{l}{\sqrt{l^2 - d^2 \frac{G^2}{G^2 + F^2}}}$$

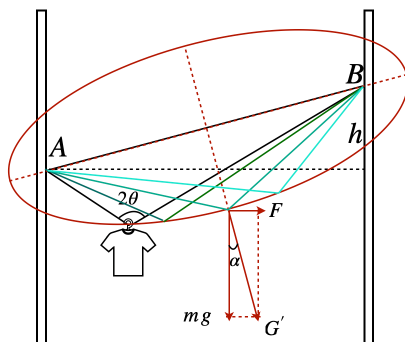
结论 此时 T 的表达式对应悬挂点无高度差的情况

- (1) 将 B 点上移（或将两杆距离拉远），则 d' 变大， T 变大；
- (2) 将 B 点下移（或将两杆距离缩紧），则 d' 变小， T 变小。

注意 风力增大时，等效载荷和绳间夹角同时变化，因此张力不一定单调增大。事实上

- (1) $\frac{d}{l} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，随着风力增大 T 单调增大；
- (2) $\frac{d}{l} > \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，则随着风力增大 T 先减小再增大。

模型拓展 上述分析均建立在悬挂点 A 、 B 无高度差的情况下，下面我们来讨论更一般的情况，不妨假定 B 点更高，设两点的高度差为 h ，由法二的分析我们得知，此时焦点 A 、 B 倾斜，重物轨迹应为一个倾斜的椭圆，如下图所示：



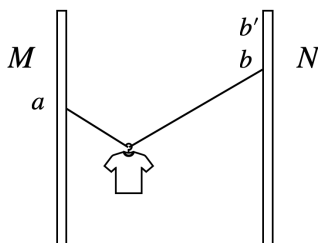
随着风力的逐渐增大，重物逐渐随着椭圆向右移动，

(1) 若初始在短轴左侧 $\rightarrow \theta$ 先增大再减小（到达短轴顶点时达最大值）；

(2) 若初始在短轴右侧 $\rightarrow \theta$ 持续减小。

在短轴顶点处张角取得最大值，此时风力应满足的条件为 $\frac{F}{mg} = \frac{h}{d}$ 。

EXAMPLE 1 如图所示，轻质不可伸长的晾衣绳两端分别固定在竖直杆 M 、 N 上的 a 、 b 两点，悬挂衣服衣架钩是光滑的，挂于绳上处于静止状态。如果只改变一个条件，衣架静止时，下列说法正确的是

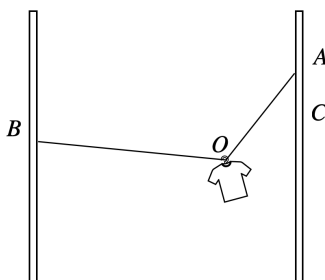


- A. 绳的右端上移到 b' ，绳子拉力变小
- B. 绳的两端高度差越小，绳子拉力越大
- C. 将杆 N 向右移一些，绳子拉力变大
- D. 若换挂质量更大的衣服，则衣服架悬挂点右移

解析

对于AB，上下移动绳子拉力不变，错误；对于C，两杆间距变大，拉力变大，正确；重物变重不影响，故绳子与水平面的夹角不变，只有拉力会变大，故悬挂点不变，错误。综上，答案为C。

EXAMPLE 2 晾晒衣服的绳子两端 A 、 B 分别固定在两根竖直杆上， A 点略高于 B 点，原来无风状态下衣服保持静止。衣服受到水平向右的恒定风力时，在新的位置保持静止，如图所示，不计绳子的质量及绳和衣架挂钩间的摩擦，下列说法正确的是



CHAPTER 4

牛顿定律

一. 国际单位制

国际单位制是目前世界上最通用、最统一的计量体系，由国际计量大会（CGPM）规定，用来保证物理量测量和计算的一致性。它从 **七个基本单位** 出发，派生出其他物理量的单位。

物理量	单位名称	单位符号
长度	米	m
质量	千克	kg
时间	秒	s
电流	安培	A
热力学温度	开尔文	K
物质的量	摩尔	mol
发光强度	坎德拉	cd

常见的导出单位

- (1) 面积 m^2 ，体积 m^3 ，速度 m/s 。
- (2) 力 $\text{N} = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$ 。
- (3) 功/能量 $\text{J} = \text{N} \cdot \text{m} = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$ 。
- (4) 功率 $\text{W} = \text{J/s} = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3$ 。
- (5) 电荷量 $\text{C} = \text{A} \cdot \text{s}$ 。
- (6) 电压 $\text{V} = \text{W/A} = \text{kg} \cdot \text{m}^2/(\text{s}^3 \cdot \text{A})$ 。

注意 在物理学中，为了方便表示极大或者极小的数值，常常使用科学记数法还有特定的词头前缀，如：千 (k) = 10^3 、兆 (M) = 10^6 、毫 (m) = 10^{-3} 、微 (μ) = 10^{-6} 、纳 (n) = 10^{-9} 、皮 (p) = 10^{-12} 。

二. 牛顿定律

1. 牛顿第一定律

牛顿第一定律 如果一个物体不受外力作用，它将保持静止或者匀速直线运动状态不变。

对惯性的理解 如果物体不受力的作用，原来静止的物体可以一直保持静止状态，原来运动的物体将保持其速度沿直线一直运动下去，这种保持原来运动状态不变的性质叫做惯性。

例如 汽车突然刹车时，乘客的脚已经慢下来，而身体上部由于惯性要保持原先的运动装填，因此身体会向前倾；汽车突然开动时，乘客的脚已经开始随车运动，而身体的上部由于惯性要保持原来静止的状态，因此身体会向后仰。

3. 牛顿第三定律

牛顿第三定律 两物体间相互作用力与反作用力大小相等，方向相反，作用在同一条直线上。公式表示：

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

其中， $\vec{F}_{AB}$ 为 A 对 B 的作用力， $\vec{F}_{BA}$ 为 B 对 A 的作用力。

注意 作用力与反作用力不能相互抵消，因为它们作用在不同物体上。

思考 一块质量为 M 的强磁铁放置在水平桌面上的台秤上，在磁铁正上方，由静止释放一个质量为 m 的闭合铜环，在铜环下落过程中，台秤的示数将如何变化？

答案 变大

铜环下落时，穿过铜环的磁通量发生变化，铜环中产生感应电流。根据楞次定律，感应电流产生的磁场总是阻碍铜环与磁铁之间相对运动状态的改变，因此铜环受到阻碍其下落的磁场力，即磁场力具有向上的分量。根据牛顿第三定律，铜环对磁铁施加大小相等、方向向下的作用力。因此台秤对磁铁的支持力增大，示数变大。

4. 非惯性系简介（拓展）

惯性系与非惯性系

惯性系 若在某参考系中，不受力或所受合力为零的物体能够保持静止或匀速直线运动，则该参考系称为**惯性参考系**，简称惯性系。在惯性系中，牛顿第二定律可以直接写为

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

非惯性系 若一个参考系相对惯性系存在加速度，包括平动加速或发生转动，则该参考系称为**非惯性参考系**，简称非惯性系。在非惯性系中，即使物体没有受到相应方向的实际力，也可能相对该参考系出现加速度。因此，牛顿第二定律不能直接写成

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}_{\text{相}}$$

关键判断 相对地面有加速度的物体，如果把它当参考系，基本都是非惯性系。

非惯性系中的惯性力

物体在非惯性系中会受到非惯性力，其满足满足

$$F_{\text{惯}} = ma_0, \text{方向与参考系加速度方向相反}$$

注意 上式基于参考系相对惯性系仅做平动，不发生转动。

证明 设非惯性系 S' 相对惯性系 S 的加速度为 $\vec{a}_0$ ，质点相对 S' 的加速度为 $\vec{a}_{\text{相}}$ 。质点相对惯性系的加速度为

$$\vec{a} = \vec{a}_{\text{相}} + \vec{a}_0$$

在惯性系 S 中，根据牛顿第二定律， $\sum \vec{F} = m\vec{a} = m(\vec{a}_{\text{相}} + \vec{a}_0)$ 。整理得

$$\sum \vec{F} - m\vec{a}_0 = m\vec{a}_{\text{相}}$$

定义非惯性系中的惯性力为 $\vec{F}_{\text{惯}} = -m\vec{a}_0$ ，则在非惯性系中可以写成

$$\sum \vec{F} + \vec{F}_{\text{惯}} = m\vec{a}_{\text{相}}$$

理解 这里指进行简单介绍，在动量章节中有简单应用，不要求掌握，理解即可。

三. 视重变化与等时圆模型

1. 超重与失重

视重 在物理学上，人体神经所感知到的重量，被称为**视重**。其本质就是支撑面作用于人体的法向弹力。

重力与视重的区别 在实际的物理场景当中，物体的所受重力和视重常常是不一样的！在不同的情况下，这样的现象被称为“超重”和“失重”，我们可以从一个非常常见的生活化场景来理解它们——坐电梯。

a. 静止阶段

分析 当电梯处于静止不动的状态时，由静力学分析可知，人体所受重力和电梯地面的支持力达成二力平衡，即视重与实际重量相等。

b. 向上加速/向下减速

分析 当电梯向上开始加速运动时（向下减速分析同理），人们通常会感觉自己变重了，假设此时加速度为 a_{over} ，轿厢支持力为 N_{over} ，则对人体进行动力学分析可知，有：

$$m a_{over} = N_{over} - m g \Rightarrow N_{over} = m g + m a_{over}$$

此时便发生了**超重现象**，超重就是指物体所受支持力大于静止时的重力，即满足 $N > m g$ 。

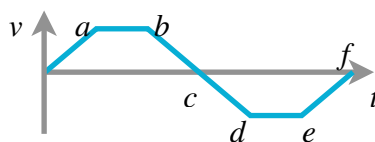
c. 向上减速/向下加速

分析 当电梯向上开始减速运动时（向下加速分析同理），人们通常会感觉自己变轻了，假设此时加速度为 a_{less} ，轿厢支持力为 N_{less} ，则对人体进行动力学分析可知，有：

$$m a_{less} = m g - N_{less} \Rightarrow N_{less} = m g - m a_{less}$$

此时便发生了**失重现象**，失重就是指物体所受支持力小于静止时的重力，即满足 $N < m g$ 。特别地，当电梯向下的加速度大于或者等于重力时，人会感觉到没有重力存在，也就是进入**完全失重状态**。

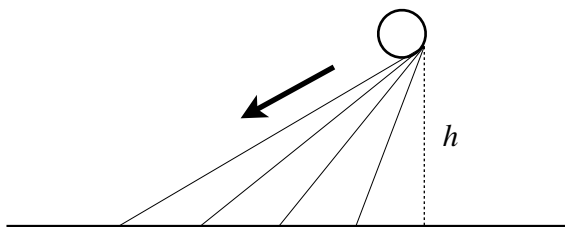
典例分析 如下为电梯运行的 $v-t$ 图像，规定速度方向向上为正，判断超重失重情况。



分析 $0 \sim a$ 加速上升，超重； $b \sim c$ 减速上升，失重； $c \sim d$ 加速下降，失重； $e \sim f$ 减速下降，超重； $a \sim b$ 和 $d \sim e$ ：匀速，正常状态。

2. 直线滑轨

相同竖直高度模型 小球从倾角 θ 不同的光滑斜面的同一高度滚下。



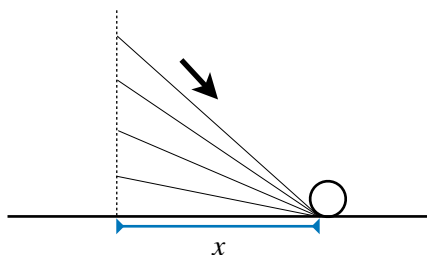
结论 斜面倾斜角越小，下滑时间越长；斜面倾斜角越大，下滑时间越短。

分析 利用运动学公式 $s = \frac{1}{2} a t^2$ ，可得

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2s}{g \sin \theta}} = \sqrt{\frac{2h}{g \sin^2 \theta}}$$

根据 $t = \sqrt{\frac{2h}{g \sin^2 \theta}}$ 可知：斜面倾斜角越小，下滑时间越长；斜面倾斜角越大，下滑时间越短。

相同水平宽度模型 小球从宽度相同的倾角 θ 不同光滑斜面滚下。



结论 下滑时间 $t = 2\sqrt{\frac{x}{g \sin 2\theta}}$. $\theta = 45^\circ$ 的时候, 下滑时间取得最小值。

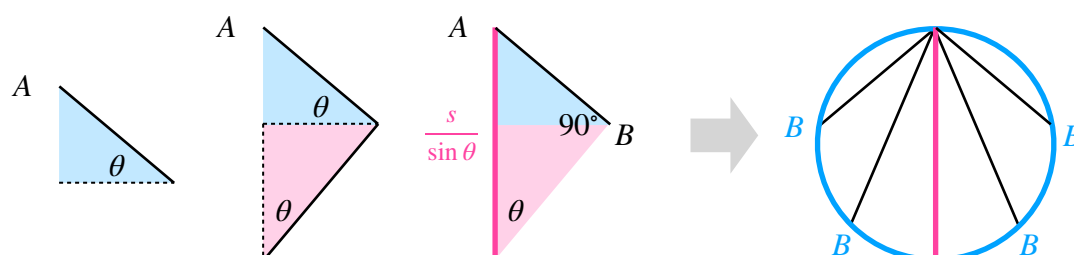
分析 根据 $x = s \cos \theta$ 可知, $t = \sqrt{\frac{2x}{g \sin \theta \cos \theta}} = 2\sqrt{\frac{x}{g \sin 2\theta}}$, 因此 $\theta = 45^\circ$ 的时候, 下滑时间取得最小值。

3. 伽利略的等时圆模型

在前面的直线滑轨模型中, 我们研究了轨道倾角对下滑时间的影响。反过来考虑: 若要求质点沿不同直线轨道下滑的时间相同, 这些轨道应满足怎样的几何关系?

等时圆的建立 如图, 静止的小球从任意光滑直线滑轨顶端 A 下滑固定时间 t 到点 B , 求所有点 B 组成的轨迹。

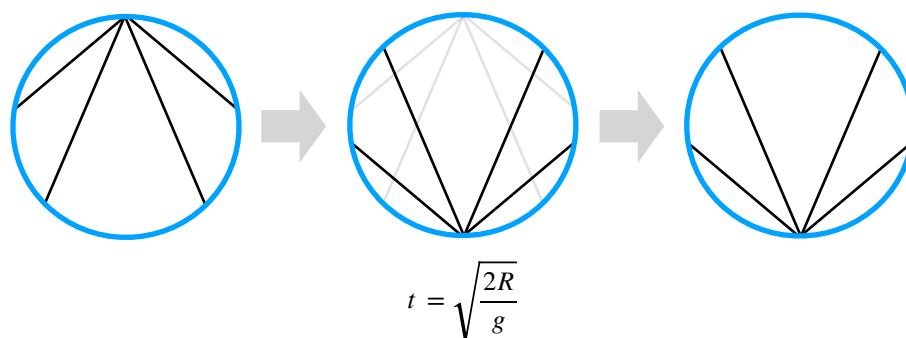
分析 根据直线滑轨 $t = \sqrt{\frac{2s}{g \sin \theta}}$ 可知, 时间固定相等时必有 $\frac{s}{\sin \theta}$ 为定值, 利用射影模型构造出 $\frac{s}{\sin \theta}$ 边, 可知



B 在以 $\frac{s}{\sin \theta}$ 为直径的圆上运动, 这个圆, 我们称为等时圆, 其性质为

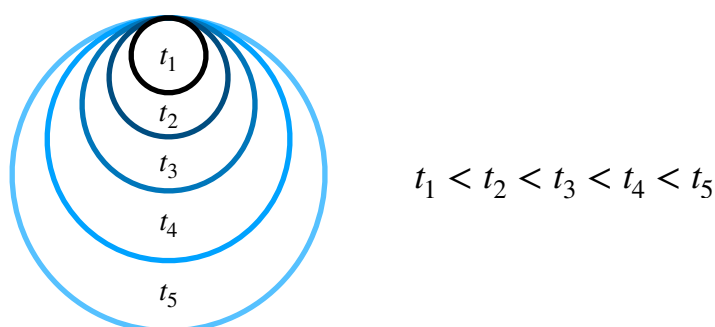
静止释放, 从 A 下滑到圆上任意一点所用时间相等, 若圆的直径为 R , 则 $t = \sqrt{\frac{2R}{g}}$.

基本转化 将等时圆上任意一条轨迹关于圆心中心对称, 所得到轨道长度、倾斜角仍然一样, 只是起终点在同一个圆上看上去不同而已, 故滑动时间会依然相等。

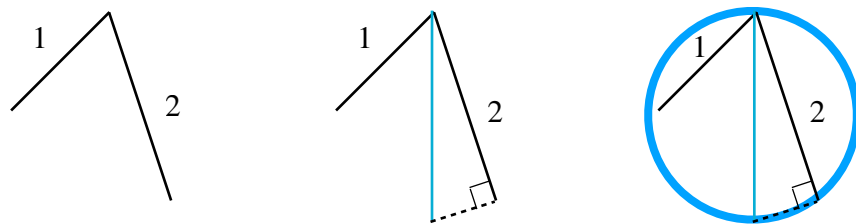


注意 等时圆模型成立需要物体静止释放, 轨道光滑, 且各路线交于圆的最高或低点。

几何视角 自由落地运动中, 落体时间越长, 落体路程越长, 我们画出每个自由落体所对应的等时圆, 便可得到如下几何关系:



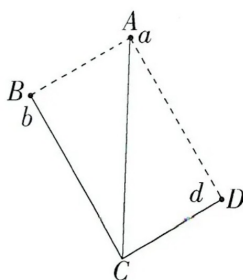
那么, 当我们比较任意两个直线轨道1和2时, 可先将两条轨道的起/终点平移到一起, 画出其中一条轨道的等时圆, 再看另一条轨道的终/起点在圆内还是圆外, 例如:



1的终点在2的等时圆之内, $t_1 < t_2$

代数视角 如果用 $t = \sqrt{\frac{2s}{g \sin \theta}}$ 的公式来看, 其实就是在比较直径 $\frac{s}{\sin \theta}$ ($\frac{h}{\sin^2 \theta}$) 的大小, 在题目中我们算出具
体结果即可比较.

EXAMPLE 1 如图, 光滑细杆 BC 、 DC 和 AC 构成矩形 $ABCD$ 的两邻边和一条对角线, $AC:BC:DC = 5:4:3$, AC 杆竖直, 各杆上分别套有一小球 a, b, d , 且三小球的质量比为 $1:2:3$, 现让三小球同时从各杆的顶点由静止释放, 不计空气阻力, 则 a, b, d 三小球在各杆上滑行的时间之比为



A. $1:1:1$

B. $5:4:3$

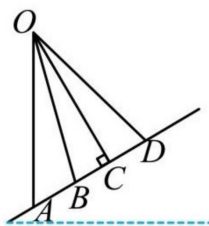
C. $5:8:9$

D. $1:2:3$

解析

由于 $ABCD$ 为矩形, 故 A, B, C, D 四点必在以 AC 边为直径的同一个圆周上, 由等时圆模型可知, 由 A, B, D 三点释放的小球 a, b, d 必定同时到达最低点, 故A正确.

EXAMPLE 2 如图, 在斜面上有四条光滑细杆, 其中 OA 杆竖直放置, OB 杆与 OD 杆等长, OC 杆与斜面垂直放置, 每根杆上都套着一个小滑环, 四个环分别从 O 点由静止释放, 分别沿 OA, OB, OC, OD 滑到斜面上所用的时间依次为 t_1, t_2, t_3, t_4 , 下列关系正确的是



A. $t_1 > t_2 > t_3$

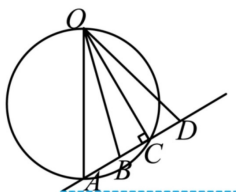
B. $t_1 = t_3 > t_2$

C. $t_2 = t_4 > t_1$

D. $t_2 < t_3 < t_4$

解析

以 OA 为直径画圆, 由等时圆模型, 可知从图上最高点沿任意一条弦滑到底所用时间相同, 故沿 OA 和 OC 滑到底的时间相同, 即 $t_1 = t_3$



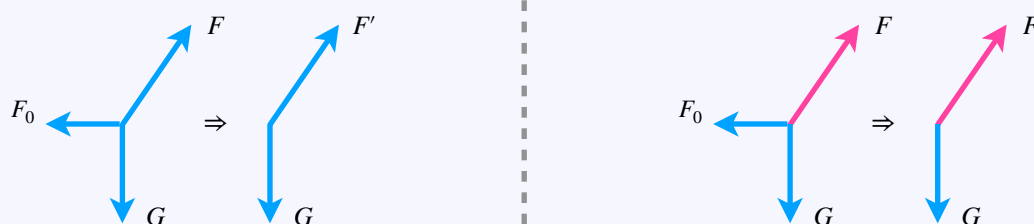


分析 在不剪断绳子之前，两种情况小球的受力情况相同：

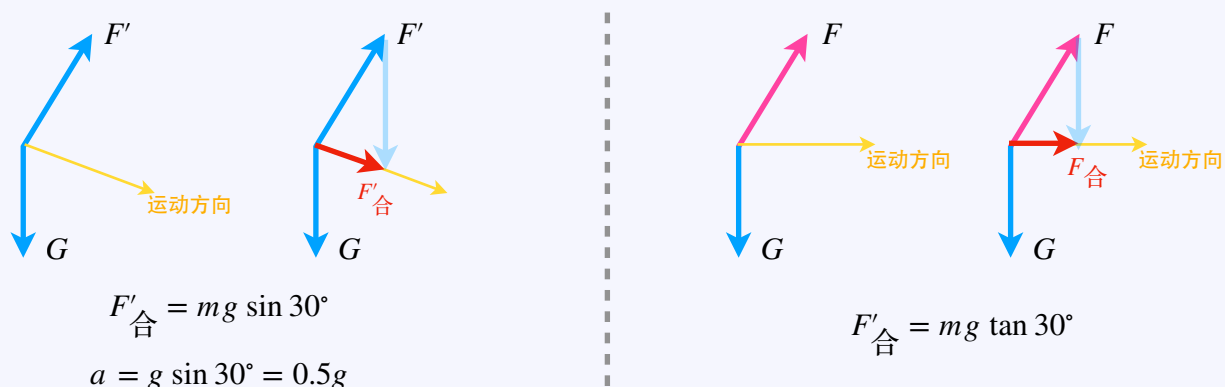
$$F = \frac{mg}{\sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}mg$$

$$F_0 = \frac{mg}{\tan 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}mg$$

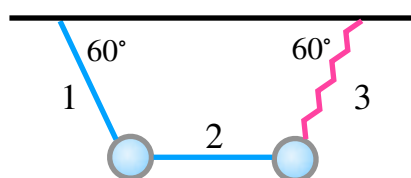
剪断绳子后，左侧情况 F 突变为 F' ，右侧情况 F 保持不变，即



此时，左侧绳子仍然保持紧绷状态，故小球向垂直于绳子的方向运动，即加速度垂直于绳子方向；而右侧，小球在 F 和 G 的共同作用下运动，即 F 和 G 的合外力 $F_{\text{合}}$ ，在变化前， F 和 G 的合外力 $F_{\text{合}}$ 抵消 F_0 ，故 $F_{\text{合}} = -F_0$ ，小球朝 $-F_0$ 方向运动：



典例2 如图所示，两小球质量均为 m ，假设绳 1,2 原本都绷直，系统静止，突然剪断绳 1，求剪断瞬间两个小球的加速度。



分析 先分析系统静止状态，记 n 此时的拉力为 F_n ，以 m_1, m_2 为整体受力分析

$$2mg = \frac{\sqrt{3}}{2}(F_1 + F_3), \quad F_1 = F_3$$

故 $F_3 = \frac{2\sqrt{3}}{3}mg$ ，剪断后2后 F_2 会突变，故此处无需隔离分析；

CHAPTER 5

曲线运动

一. 曲线运动

1. 认识曲线运动

曲线运动 物体运动轨迹是曲线的运动；

速度方向 曲线运动中某点的速度方总是沿该点曲线的切线方向，且时刻发生变化；

理解 雨伞旋转时，伞边缘的水滴会沿切线方向甩出，这表明水滴在离开雨伞瞬间的速度方向是切线方向。

速度大小 曲线运动中速度大小的变化情况分为两大类

(1) $|\vec{v}|$ 不变：匀速曲线运动（匀速圆周运动）；

(2) $|\vec{v}|$ 改变：匀变速曲线运动（加速度不变）、变速曲线运动（加速度改变）。

2. 曲线运动的受力分析

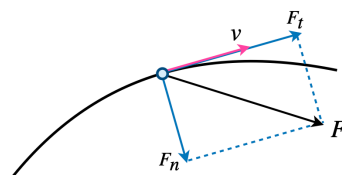
曲线运动产生的原因：

轨迹为曲线 $\Rightarrow v$ 方向不断改变 $\Rightarrow$ 存在不与速度共线的 $a \Rightarrow$ 存在不与速度共线的合外力

因此曲线运动产生的根本原因是：

物体所受合外力的方向与瞬时速度方向不共线

下面我们分析外力是如何改变物体速度状态的，如下图所示：



分析 设质点受到的合外力为 F ，将 F 分解为：

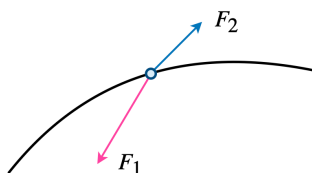
切向分力 F_t 与速度 **共线**，会产生切向的加速度 a_t ，改变速度大小；

法向分力 F_n 与速度 **垂直**，会产生法向的加速度 a_n ，改变速度方向，使物体往 F_n 侧偏移。

结论 若合外力 F 与速度 v 夹角为 θ ：

$0 \leq \theta < 90^\circ$	物体速度变大
$90^\circ < \theta \leq 180^\circ$	物体速度变小
$\theta = 90^\circ$	物体速度不变，仅改变方向

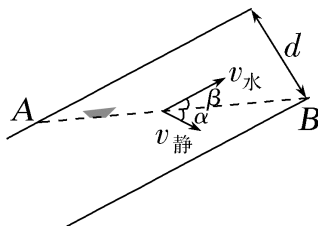
思考 物体在曲线轨迹上运动时，图中的 F_1 、 F_2 哪个可能是真实的受力？



答案 F_1 ，因为曲线的形成与法向力有关，因此 F_n 所指向的方向一定为轨迹的内侧（凹侧）。

可解得 $d = 400\sqrt{3}\text{m}$, 故B正确, D错误。

EXMAPLE 2 (多选) 如图所示, 小船从河岸的 A 点匀速运动到对岸的 B 点, 船在静水中的速度 v_a 、河水的流速 v_b 与运动轨迹 AB 的夹角分别为 α 、 β , 两岸的宽度为 d , 且 v_a 、 v_b 大小不变, 下列说法正确的是



- A. $v_b \sin \beta = v_a \sin \alpha$
- B. 小船渡河时的速度 v 与 v_a 、 v_b 关系为 $v = v_b \sin \beta + v_a \sin \alpha$
- C. 渡河时间由 v_a 、 v_b 、 α 、 β 、 d 几个量共同决定
- D. 当 $\alpha + \beta = 90^\circ$, 即 v_a 与河岸垂直, 渡河的时间最短

解析

把 v_a 、 v_b 分别沿 AB 和垂直 AB 所在方向分解, v_a 、 v_b 的合速度沿 AB 所在的方向, 所以

$$v_b \sin \beta = v_a \sin \alpha, \quad v = v_b \cos \beta + v_a \cos \alpha$$

故A正确, B错误; 渡河的时间 $t = \frac{d}{v_a \sin(\alpha + \beta)}$, 可知 t 与 v_b 无关, 故C错误; 当 $\alpha + \beta = 90^\circ$, 渡河时间最短为

$$t_{\min} = \frac{d}{v_a}, \quad \text{故D正确.}$$

3. 速度合成的前提约束

在前文对于分运动的性质介绍中, 我们特别强调了一点: **各分运动独立进行, 互不干扰**。如何理解独立才是关键。前文已经说明, 速度是矢量, 两个速度矢量可以按照平行四边形法则进行运算。但必须注意。

注意 数学上, 任意两个矢量都可以相加; 物理上, 两个速度的矢量和是否代表物体的某个实际速度, 则取决于它们之间是否存在明确的运动学关系。

速度表示格式的约定 速度总是某个物体相对于某个参考物的速度。为了避免混淆, 我们可以将速度写成

$$\vec{v}_{A/B}$$

表示物体 A 相对于物体或参考系 B 的速度。

速度可直接合成的两类情况

Case1 是同一速度的两个分量

若题目已经明确将物体的运动分解为两个分运动, 分速度分别为 $\vec{v}_1$ 、 $\vec{v}_2$ 则按照运动的合成有

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

理解 这里的 $\vec{v}_1$ 、 $\vec{v}_2$ 是由运动分解定义出来的两个矢量分量, 二者之和就是物体的合速度。

Case2 构成完整的参考系转换链

若三个速度分别为 $\vec{v}_{A/B}$ 、 $\vec{v}_{B/C}$ 、 $\vec{v}_{A/C}$, 则它们满足相对速度关系

$$\vec{v}_{A/C} = \vec{v}_{A/B} + \vec{v}_{B/C}$$

理解 这种关系来自伽利略变换, 小船过河的速度叠加本质即为此种情况。

不能直接进行速度合成的常见情形

与前两类情况相反, 若多个速度之间既不构成同一运动的分解关系, 也不构成完整的参考系转换链, 就不能仅凭它们都是速度矢量, 便将其直接相加。常见情形主要有以下两类。

Case1 这些速度属于不同物体

若 $\vec{v}_A$ 、 $\vec{v}_B$ 分别表示物体A、B相对同一参考系的速度，则二者只是两个不同物体的运动状态。一般来说，

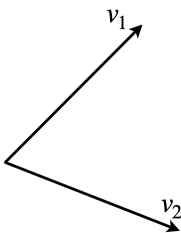
$\vec{v}_A + \vec{v}_B$ 并不代表物体A、B或其他物体的实际速度，即**无物理意义**

Case2 这些量只是某个实际速度的方向信息

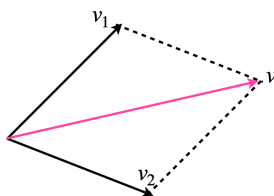
在绳、杆、接触面或导轨等约束问题中，题目给出的某个“速度”，有时只用于描述物体沿特定方向运动得多快，而不能完整描述物体的实际运动。此时，多个已知量可能是同一个未知速度在不同方向上的部分信息，而不是一次速度分解中的若干分速度。

理解 此类问题即为速度关联问题，与小船过河的简单参考系叠加不同的是需要对约束进行分析。具体分析约束的方法见下节，在此仅为铺垫。

思考1 如下图所示，一个物体具有两个速度分别为 v_1 、 v_2 的分运动，则其合运动的速度是多少？



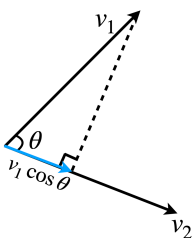
答案 由于明确说明了 v_1 、 v_2 是两个分运动，合运动的速度应用平行四边形法则进行合成，如下图所示：



思考2 一个箱子被两个人用绳子拉着运动，两人速度分别为 v_1 、 v_2 ，大小方向与**思考1**中相同（速度夹角 $\theta \neq 90^\circ$ ），则箱子实际运动速度是多少？

答案
$$v = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \theta}}{|\sin \theta|}$$

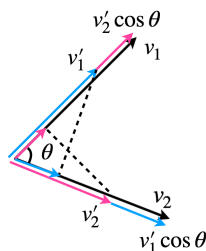
错解 直接将 v_1 、 v_2 进行矢量合成，得到与前文相同的结果 v 。这种方法的错误明显，如图



显然，在 v_2 方向上物体的实际速度就是 v_2 ，但此时 v_1 在 v_2 方向上有投影 $v_1 \cos \theta$ ，根据运动的合成此时 v_2 方向上速度达到了 $v_2 + v_1 \cos \theta > v_2$ ，这是很荒谬的，因此这种方法显然是错误的。

理解 v_1 、 v_2 属于两个不同物体，既不是已知给出的箱子速度分量，也不构成参考系链，故不可直接相加。

正解 绳端的速度 v_1 、 v_2 不是箱子的独立分运动，而是由于“绳长不可变”这一物理限制，导致箱子实际速度在两根绳子方向上产生的**几何约束**。对于这种情况，不妨设出两个方向真正的分速度 v'_1 、 v'_2 ，如下图所示：



由于 v_1 、 v_2 均是真实的速度，是由分运动合成而来，因此列得方程 $v_1' \cos \theta + v_2' = v_2$ ， $v_2' \cos \theta + v_1' = v_1$ 。

联立解得 v_1' 、 v_2' 后便可以直接对二者矢量合成求出物体的实际速度 $v = \frac{\sqrt{v_1'^2 + v_2'^2 - 2v_1'v_2' \cos \theta}}{|\sin \theta|}$ 。但这种方法笔者很不推荐，因为这把物理问题变成了纯代数问题，并且 v_1' 、 v_2' 没有任何物理意义，这很糟糕。因此，下文中我们将给出更物理的解法。

三. 速度关联体问题

在绳、杆等连接体问题中，各物体的速度往往不是相互独立的。连接体的长度、形状或接触状态保持不变，会使不同物体的速度之间产生特定的约束关系。下面来讲解如何对约束进行分析。

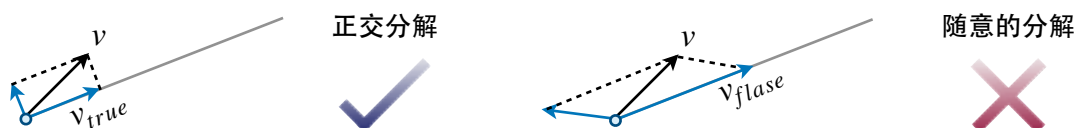
1. 刚性约束模型

刚性约束 绷紧的不可伸长的轻绳、不可形变的轻杆对系统施加的最本质限制是：

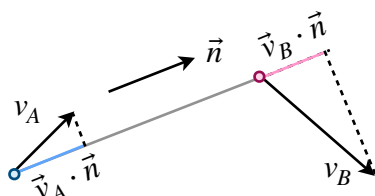
两端点之间的空间距离保持恒定。

性质 物体间距离不能发生改变，也就不难得出两物体沿绳/杆方向的速度相同。

那么我们要如何才能求出沿绳/杆方向的速度呢？显然，我们不能把 $\vec{v}$ 随意的分解。事实上，沿绳/杆方向的速度即为 $\vec{v}$ 在该方向的投影向量，为了理解这个关系，下面我们引入速度投影定理。



速度投影定理 若我们给定两点连线方向的单位向量 $\vec{n}$ ，则有



同一刚体上任意两点的速度
在这两点连线上的投影大小相等
即 $\vec{v}_A \cdot \vec{n} = \vec{v}_B \cdot \vec{n}$

证明 设存在任意两个质点 A 和 B ，位置矢量分别为 $\vec{r}_A$ 、 $\vec{r}_B$ ，速度分别为 $\vec{v}_A$ 、 $\vec{v}_B$ 。无论坐标原点在哪里，从 A 指向 B 的相对位置矢量（即连接它们的绳子或杆子）必然是：

$$\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

绳子（或杆子）的长度 l ，就是这个相对矢量 $\vec{r}_{AB}$ 的模长。同样平方取内积：

$$l^2 = \vec{r}_{AB} \cdot \vec{r}_{AB}$$

现在，我们对等式两边同对时间 t 求导，可得

$$2l \frac{dl}{dt} = 2\vec{r}_{AB} \cdot \frac{d\vec{r}_{AB}}{dt}$$

其中， $\frac{d\vec{r}_{AB}}{dt} = \frac{d(\vec{r}_B - \vec{r}_A)}{dt} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$ ，代入可得

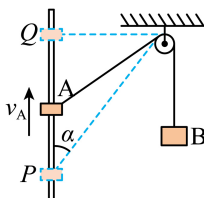
$$l \cdot \frac{dl}{dt} = \vec{r}_{AB} \cdot (\vec{v}_B - \vec{v}_A)$$

同样把 l 除过去，并定义从 A 指向 B 的单位方向矢量为 $\vec{n}$ ，则有

$$\frac{dl}{dt} = \vec{n} \cdot (\vec{v}_B - \vec{v}_A)$$

而由于 l 是个常数，因此 $\frac{dl}{dt} = 0$ ，从而我们得出 $\vec{v}_A \cdot \vec{n} = \vec{v}_B \cdot \vec{n}$ 。

补充 实际题目中也有 $\frac{dl}{dt} \neq 0$ 的情况，大多 $\frac{dl}{dt} = \text{定值}$ ，即两点投影的速度差为定值。

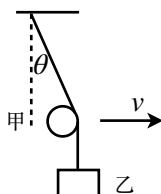


- A. A 经过点 P 时, B 的速度大小等于 $\frac{v_A}{\cos \theta}$
- B. A 经过 Q 点时, A 、 B 的速度大小相等
- C. 在 A 从点 P 运动至 Q 点的过程中, B 始终处于失重状态
- D. 在 A 从点 P 运动至点 Q 的过程中, B 的速度逐渐减小

解析

由速度投影可得 $v_A \cos \alpha = v_B$, 故A错误; 在 Q 点时, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, 因此 $v_B = 0 \neq v_A$, 故 B 错误; 对于CD, $\cos \alpha \downarrow \Rightarrow v_B \downarrow$, 可知 a_B 竖直向上, 因此处于超重状态, 故C错误, D正确。综上, 选A。

EXAMPLE 2 如图所示, 轻绳一端固定在 O 点, 动滑轮甲以速度 v 水平向右匀速运动, 当绳与竖直方向的夹角为 θ 时, 试求物体乙的速度大小。



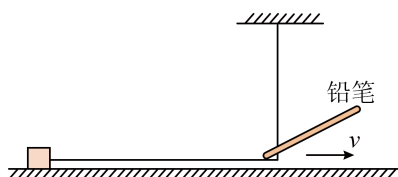
解析

水平方向: $v_{乙水平} = v$; 竖直方向: 显然 $v_{乙竖直} =$ 绳子缩短的速度, 由速度投影定理得

$$v \sin \theta = v_{乙竖直}$$

因此, $v_{乙} = v \sqrt{1 + \sin^2 \theta}$ 。

EXAMPLE 3 如图所示, 细线一端固定在天花板上, 另一端连接在物块上, 用水平铅笔与细线接触, 开始铅笔上端细线竖直, 现使铅笔以速度 v 水平向右匀速平移, 运动中连接物块的细线始终水平, 铅笔与铅笔两边细线所在竖直面始终垂直, 当细线与竖直方向夹角为 θ 时, 物块的速度大小



解析

本题即为 $\frac{dl}{dt} \neq 0$ 的情况。铅笔（接触点）以 v 运动, 这个速度对绳子产生了两个独立的拉长效应, 设斜绳部分长为 l_1 , 水平绳部分长为 l_2 :

对斜绳的效应 铅笔向右平移, 试图拉长斜绳。由于 v 是水平的, 设斜绳与竖直方向夹角为 θ , 因此 v 与斜绳的夹角为 $\frac{\pi}{2} - \theta$ 。现考虑斜绳的上下端点, 一端速度为0, 一端具有速度, 根据速度投影定理则有

$$\frac{dl_1}{dt} = v \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = v \sin \theta \quad (\text{即拉长斜绳的速率} = \text{铅笔速度沿斜绳方向的投影})$$

对水平绳的效应 注意水平绳两端都在动。铅笔以 v 运动, 试图以 v 的速率拉长水平绳。物块向右以 v_b 运动, 试图以 v_b 的速率缩短水平绳。因此, 水平绳实际的伸长速率为

构建直角三角形，由勾股定理得

$$x^2 + L^2 = R^2$$

两边求导化简得

$$x \cdot v' + L \cdot v = 0 \Rightarrow |v'| = \frac{L}{x} \cdot v = v \cdot \tan \theta$$

法二（依赖刚性约束） 这种约束没有明确的绳/杆，唯一确定的就是二者时刻接触，因此在接触面的法线方向上杆的速度与半圆柱体的速度相等，此时考虑接触点和 O 点，接触点实际速度为 v' ， O 点实际速度为 v ，由速度投影定理得

$$v' \cos \theta = v \sin \theta \Rightarrow v' = v \tan \theta$$

总结 解析法可总结为以下四步

STEP 1 建系设元（进行代数化）

动作 寻找系统中静止不动的点作为坐标原点 O ，建立直角坐标系。

目标 设出目标动点（如相交点、物块）的坐标 (x, y) ，以及相关连接点的位置参数。

STEP 2 寻找约束（列几何方程）

动作 观察系统的刚性限制，列出这些坐标变量必须满足的几何等式。

a. 距离约束 两点间距离公式、勾股定理（如绳长、杆长恒定）；

b. 轨迹约束 直线方程 $y = kx + b$ （如例5中交点必须在某根杆上）、圆的方程 $x^2 + y^2 = R^2$ （如质点在圆盘边缘）。

c. 角度约束 正弦定理、余弦定理。

STEP 3 对时间求导（引入速度）

动作 将 STEP 2 得到的几何方程，等号两边同时对时间 t 进行求导。

目标 因为坐标对时间的导数就是该方向的分速度，即

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y$$

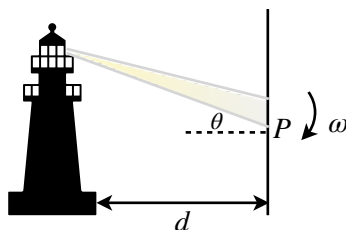
注意 当方程中出现随时间变化的 $\theta(t)$ 时，对时间 t 求导，最后要乘以一个 $\frac{d\theta}{dt}$ ，而这个 $\frac{d\theta}{dt}$ 在物理上有着明确的意义，即角速度 ω 。常见公式有： $\frac{d}{dt}(\sin \theta) = \cos \theta \cdot \frac{d\theta}{dt} = \omega \cos \theta$ ， $\frac{d}{dt}(\cos \theta) = -\sin \theta \cdot \frac{d\theta}{dt} = -\omega \sin \theta$

STEP 4 代入求解（数学还原物理）

动作 将题目已知的 v 、 ω 等条件代入求导后得到的方程，解出未知的 v_x 和 v_y 。

目标 最后利用合速度公式 $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ 求出物体的真实速度大小。

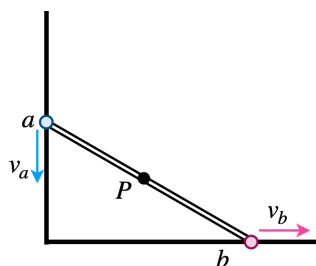
EXAMPLE 1 如图，一台探照灯距离竖直墙壁的水平距离为 d ，探照灯以恒定的角速度 ω 顺时针旋转。求当光束与水平线夹角为 θ 时，墙上光斑 P 向下移动的速度 v 。



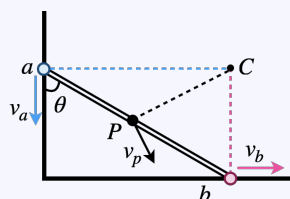
解析

STEP 1 场景较简单，我们可以跳过建系，直接寻找约束。如图，显然满足约束

(2) 轻杆中点 P 的速度 v_p 的大小。



分析 v_a 、 v_b 速度方向已知，做出二者垂线，交点即为速度瞬心，记为 C 点，如下图所示：



设在这一瞬间， a 、 b 、 P 绕 C 点旋转的角速度为 ω ，故有 $v_a = \omega \cdot \overline{Ca}$ 、 $v_b = \omega \cdot \overline{Cb}$ 、 $v_p = \omega \cdot \overline{CP}$ ，则

$$v_b = \frac{v_a}{\overline{Ca}} \cdot \overline{Cb} = \frac{v_a}{\tan \theta}$$

由于直角三角形斜边的中线等于斜边的一半，因此 $\overline{CP} = \frac{1}{2} \overline{ab} = \frac{Ca}{2 \sin \theta}$ ，故

$$v_p = \frac{v_a}{\overline{Ca}} \cdot \frac{\overline{Ca}}{2 \sin \theta} = \frac{v_a}{2 \sin \theta}$$

若不想用瞬心，我们该怎么做呢？第一问很简单，不多赘述，我们主要看第二问。

法二（解析法） 以墙角为原点 O 。设时刻 t ，小球 a 的纵坐标为 y ，小球 b 的横坐标为 x 。因为 P 是杆的中点，根据中点坐标公式， P 点的坐标为：

$$x_P = \frac{x}{2}, \quad y_P = \frac{y}{2}$$

分别对 P 点的横纵坐标求时间的导数：

$$v_{Px} = \frac{1}{2} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} v_b, \quad v_{Py} = \frac{1}{2} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2} v_a$$

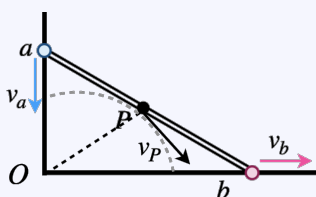
因此， P 点的实际速度 v_p 为这两个正交分速度的矢量和：

$$v_p = \sqrt{v_{Px}^2 + v_{Py}^2} = \sqrt{\left(\frac{v_b}{2}\right)^2 + \left(\frac{v_a}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{v_a^2 + v_b^2}$$

我们在第 (1) 问中已经利用投影法求出 $v_b = \frac{v_a}{\tan \theta}$ ，代入上式

$$v_p = \frac{1}{2} \sqrt{v_a^2 + \left(\frac{v_a}{\tan \theta}\right)^2} = \frac{v_a}{2} \sqrt{1 + \cot^2 \theta} = \frac{v_a}{2} \frac{1}{\sin \theta} = \frac{v_a}{2 \sin \theta}$$

法三（投影法） 设墙角为 O 点，因为杆与墙角构成的为直角三角形，且 P 为杆的中点，因此 PO 的长度为定值，所以 P 点轨迹是个圆。此时我们可以确定 P 点的速度方向，进而使用速度投影定理求解，图示如下



此时 v_b 与杆的夹角为 $\frac{\pi}{2} - \theta$ ， v_p 与杆的夹角为 $2\theta - \frac{\pi}{2}$ ，根据速度投影定理可得

$$v_b \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = v_p \cos\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right), \quad v_b = \frac{v_a}{\tan \theta} \Rightarrow v_p = \frac{v_a}{2 \sin \theta}$$

$$(\vec{a}_B \cdot \vec{n}) - (\vec{a}_A \cdot \vec{n}) = -\frac{|\vec{v}_{AB}|^2}{l} \Rightarrow a_{B//} - a_{A//} = -\frac{v_{AB}^2}{l}$$

由于相对速度 $v_{AB} = l\omega$ (ω 为杆转动的角速度)，上式化简为：

$$a_{A//} - a_{B//} = l\omega^2$$

思考 由公式 $a_{A//} - a_{B//} = l\omega^2$ 来看，因为 $l\omega^2 \geq 0$ ，这似乎意味着“A 的投影加速度永远大于 B 的投影加速度”。可是 A 和 B 都是杆的两端，地位是完全对称的，为什么 A 永远比 B 大？

答案 我们推导出的原始矢量方程是：

$$\vec{r}_{AB} \cdot (\vec{a}_B - \vec{a}_A) = -|\vec{v}_{AB}|^2$$

请注意这里的 $\vec{r}_{AB}$ 它是一个由 A 指向 B 的矢量！当我们在等式两边除以杆长 l 时，我们实际上是把加速度投影到了一个“以 A 为起点，指向 B”的有向轴上。如果我们规定“由 A 指向 B 的方向为正方向”：

$$a_{B(A \rightarrow B)} - a_{A(A \rightarrow B)} = -l\omega^2 \Rightarrow a_{A(A \rightarrow B)} - a_{B(A \rightarrow B)} = l\omega^2$$

我们研究 B 相对于 A 的运动。此时 B 相对于 A 的轨迹是以 A 为圆心、半径为 l 的圆周运动，因此其相对向心加速度指向 A。所以沿 $A \rightarrow B$ 正方向看，B 的相对加速度分量为负，从而得到

$$a_{A//} - a_{B//} = l\omega^2$$

因此不难理解，如果反过来以 B 为参考点，研究 A 相对于 B 的运动，那么正方向自然变为 $B \rightarrow A$ 结论也会相应变成前文中给出

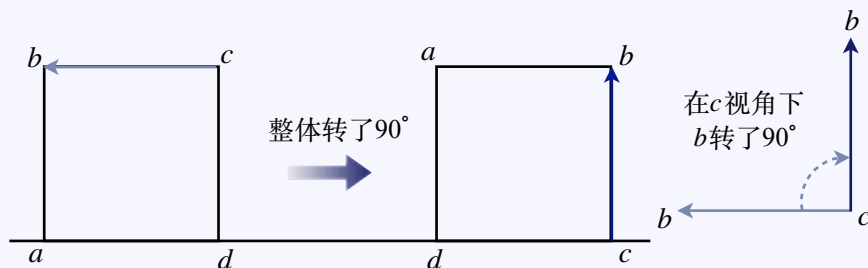
$$a_{B//} - a_{A//} = l\omega^2$$

理解 二者本质完全一致，只是选取的相对位置矢量和投影正方向不同。

ω 的参考系不变性

细心的同学在看 $a_{A//} - a_{B//} = l\omega^2$ 或 $a_{B//} - a_{A//} = l\omega^2$ 这组公式时，一定会产生一个疑问：既然正方向变了，或者说参考点变了，那么 ω 的大小会不会发生改变呢？这里的 ω 到底是谁的角速度？事实上：若参考系只有平动变化，无论选取哪点作为参考系， ω 的大小都是不变的。下面我们给出粗略的理解证明。

证明 在刚体做平面运动时，不论你站在刚体上的哪一个点去观察，也不论你观察的是刚体上的哪一条线段，在相同时间内，它们相对于绝对空间转过的角度 $\Delta\theta$ 必定严格相等。如何理解这句话？这就像是一个阅兵方阵（刚体）在操场上“向右旋转”。无论你是站在方阵的第一排看，还是站在最后一排看，整个方阵转过的角度都是 90° 。



既然 $\Delta\theta$ 处处相等，那么角速度 $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ 自然也就处处相等、绝对唯一。

如何求解 ω

方法一 定长连线两端的相对速度满足 $|\vec{v}_B - \vec{v}_A| = l|\omega|$ ，因此 $|\omega| = \frac{|\vec{v}_B - \vec{v}_A|}{l}$

方法二 若前文已经确定了刚体的瞬心 C 也可以任选刚体上一点 P，利用瞬心法 $|\omega| = \frac{v_P}{CP}$ 来求解即可。

典例分析 长度为 l 的刚性轻杆，上端 A 沿竖直墙面向下运动，下端 B 沿水平地面向右运动。某时刻杆与水平面的夹角为 α ，B 点速度大小为 v 。设 A、B 加速度分别为 a_A 、 a_B 求二者之间的大小关系。

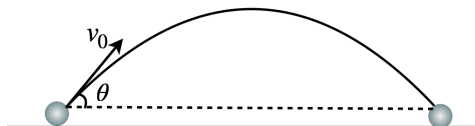
五. 斜抛运动

1. 斜抛运动

什么是斜抛运动 平抛运动中有一隐藏的限制条件，即初速度与加速度垂直。取消这一限制条件后即为斜抛运动，此时初速度方向是任意的。

分析方法 分析此类运动我们仿照平抛运动的分析方法，根据需要对速度采取正交分解或对速度、加速度共同分解来灵活处理。

情境1 在水平面抛出一个初速度与地面夹角为 θ ，大小为 v_0 的小球，则 θ 为多大时射程最远？



分析 如下图所示，将速度进行正交分解，水平方向上无加速度，做速度为 $v \cos \theta$ 的匀速直线运动，竖直方向上做初速度为 $v \sin \theta$ 的匀加速运动。设运动到最高点的时间为 t ，则有

对竖直方向

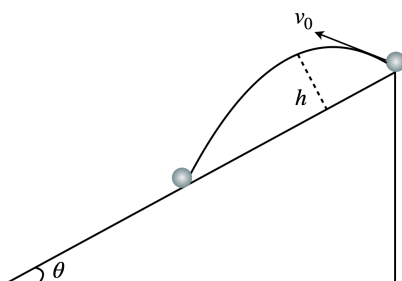
$$t = \frac{v_0 \sin \theta}{g}$$

以最高点为分界线，不难发现左右两端的运动是对称的，对水平方向，设落地时走过的位移为 x

$$x = v_0 \cos \theta t = \frac{v_0^2 \cos \theta \sin \theta}{g} \Rightarrow x = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{2g}$$

因此在 $\sin 2\theta = 1$ ，即 $\theta = 45^\circ$ 时射程最大。

情境2 在斜面上抛出一个初速度与斜面夹角为 α ，大小为 v_0 的小球，此过程中小球离斜面的最大距离 h 为多少？



分析 由前文经验不难得到此时水平竖直分解计算量很繁琐。因此，将 v_0 、 g 全部沿斜面和垂直斜面分解，因此最大距离 h 为

$$h = \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{2g \cos \theta}$$

总结 斜抛运动和平抛运动并没有本质上的区别，斜抛运动不过相当于多了一个方向的初速度，导致合初速度方向不与加速度垂直。

2. 斜交分解

对于匀变速运动，物体的位移满足 $\Delta \vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$ 。这表明，物体的运动可以形式化地分解为两个分运动：

分运动一 沿 v_0 方向的匀速直线运动

$$\Delta \vec{r}_1 = \vec{v}_0 t$$

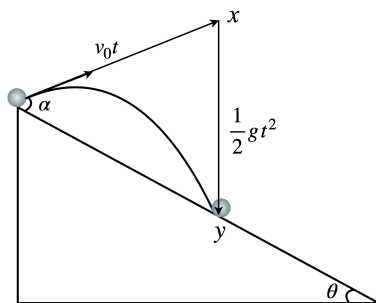
分运动二 沿 a 方向的初速度为0的匀加速直线运动

$$\Delta \vec{r}_2 = \frac{1}{2} \vec{a} t^2$$

二者的矢量和就是物体的实际位移： $\Delta \vec{r} = \Delta \vec{r}_1 + \Delta \vec{r}_2$ 。对应的，物体实际速度 $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} t$ 。

斜交分解的优势 这种分解方法对于解决斜抛运动和求最大射程问题有很好的作用。

典例分析 在斜面上抛出一个初速度与斜面夹角为 α ，大小为 v_0 的小球。

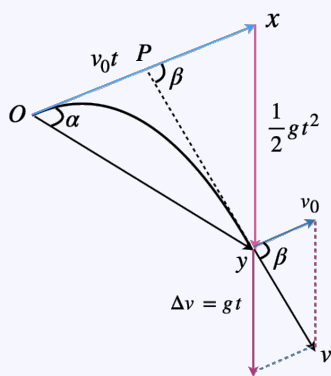


分析 按如图所示分解，物体做 v_0 方向的匀速直线运动和竖直方向的自由落体运动。基本公式：

$$x = v_0 t, \quad y = \frac{1}{2} g t^2, \quad \Delta v = g \Delta t$$

性质1 沿末速度方向的反向延长线过匀速直线方向位移 x 的中点。

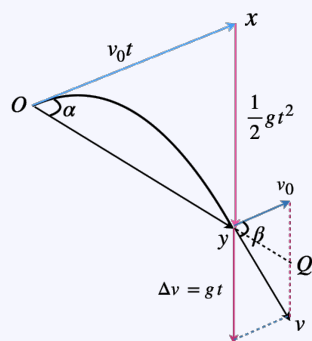
证明 如下图所示，设速度的反向延长线交 x 轴于 P 点，初速度与末速度夹角为 β



$$\text{由 } \triangle Pxy \simeq \triangle yv_0v \text{ 可得 } \frac{v_0}{gt} = \frac{v_0 t - \overline{OP}}{\frac{1}{2} g t^2} \Rightarrow \overline{OP} = \frac{1}{2} v_0 t = \frac{1}{2} x$$

性质2 沿位移方向的延长线过速度变化量 $g \Delta t$ 的中点。

证明 如下图所示，设位移的延长线交图中粉色虚线于 Q 点

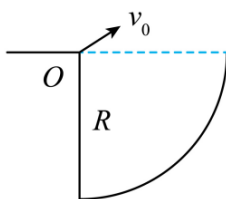


$$\text{由 } \triangle Oxy \simeq \triangle yv_0Q \text{ 可得 } \frac{v_0 t}{v_0} = \frac{\frac{1}{2} g t^2}{v_0 Q} \Rightarrow \overline{v_0 Q} = \frac{gt}{2}.$$

最远射程问题 在介绍斜抛运动之初，我们讨论了在水平面抛出，再落回水平面的最远射程问题，在实际题目中情境可能更复杂一些，例如在平面抛出，落回一个更低的平面上，在斜面抛出落在斜面上等情况。

分析方法 对于此类题目若使用正交分解法进行计算十分复杂，十分不推荐。因此我们利用上文提及的斜交分解法及其两个性质，帮助读者对此类题目进行分析。

中 g 是重力加速度大小。物资可视为质点，不计空气阻力。为避免损坏救援物资，要求物资落到圆弧上的速率最小，则物资



A. 在空中运动的时间为 $t = \sqrt{\frac{2R}{g}}$

B. 与水平方向成 45° 角斜上抛

C. 抛出点与落点的高度差为 $\frac{\sqrt{2}R}{2}$

D. 落到圆弧上的最小速率为 $\frac{\sqrt{6gR}}{2}$

解析

法一 显然下落高度 h 越小速率越小，所以问题转化为：在固定初速度 v_0 下，寻找圆弧上最高的可达点。

以 O 为原点，建系可得抛体轨迹族的包络线为 $y = -\frac{g}{2v_0^2}x^2 + \frac{v_0^2}{2g}$ 。代入 $v_0^2 = \frac{gR}{2}$ ，得到

$$y = -\frac{x^2}{R} + \frac{R}{4}$$

包络线下方为可达区域，包络线上方为不可达区域。因此圆弧与包络线的交点即为目标点。

联立 $\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ y = -\frac{x^2}{R} + \frac{R}{4}. \end{cases}$ 解得 $y = -\frac{1}{2}R$ (舍掉正数解)。水平位移 $x = \frac{\sqrt{3}}{2}R$

相应的，临界抛射角 $\tan \beta = \frac{v_0^2}{gx} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，解得 $\beta = 30^\circ$ 。故运动时间 $t = \frac{x}{v_0 \cos \beta} = \sqrt{\frac{2R}{g}}$ ，可得AD正确。

法二 要想使 h 变小，即实际位移与 x 轴的倾角 θ 最小，对于倾角 θ 向下倾斜的直线，固定初速度大小为 v_0

时，沿该方向能够达到的最大距离为 $s_{\max} = \frac{v_0^2}{g(1 - \sin \theta)}$ 。圆弧上的点到 O 的距离均为 R 。因此，该方向上的圆弧点能够到达，需要满足 $R \leq s_{\max}$ 。为了使 θ 最小临界状态下恰有

$$R = s_{\max} \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ$$

根据平分性质可知，初速度与 y 轴夹角 $\alpha = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$ ，故是 $90^\circ - \alpha = 30^\circ$ 斜上抛。其余选项不再赘述。

CHAPTER 6

圆周运动

一. 圆周运动

1. 认识圆周运动

定义 圆周运动是指物体沿着圆形轨迹运动的过程。

圆周运动的物理量

半径 r 物体在圆周上运动时，圆心到物体的距离叫做圆周运动的半径。

角速度 ω 用于描述物体转动的快慢。

定义式 $\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$ ，单位为**弧度/秒** (rad/s)

计算式 $\omega = \frac{2\pi}{T}$

理解 角速度表示为质点转过角度 $\Delta \theta$ 与所用时间 Δt 的比值，即每秒钟转过多少弧度。

线速度 v 表示物体沿圆周方向运动的速度，方向为**切线方向**（时刻变化）

定义式 $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$ ，单位为**米/秒** (m/s)

计算式 $v = \omega r$

理解 $ds = R d\theta$ ，代入可得 $v = \omega r$ 。这说明半径越大，在相同角速度下，物体的线速度会更大。

周期 T 指匀速圆周运动一周所用的时间。

例如 电风扇一秒转 10 圈 $\rightarrow$ 每圈时间 $T = 0.1s$ ，地球自转 $T = 24h$ 。

频率 f 单位时间内完成圆周运动的圈数。单位为**赫兹** (Hz)，即每秒几次。与周期成倒数关系： $f = \frac{1}{T}$ 。

转速 n 单位时间内转动的圈数，记为 n ，因而 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n = 2\pi f$ 。

2. 向心力与向心加速度

向心力 当物体沿着圆周或者曲线轨道运动时，**指向圆心的合外力**称为向心力，记为 F_n 。

特点 向心力只改变所控制物体的运动方向，而不改变运动的速率。

本质 向心力是由作用效果命名的力，即效果力，它可以由某一个力提供，也可以由几个力的合力提供，还可以由某个力的分力提供。

拓展 在任意曲线运动中，轨迹上任意一点都有其对应的曲率圆，当物体运动到该点时，其所受向心力指向该点的曲率圆的圆心，而曲率半径即为此刻“瞬时圆周运动”的半径。

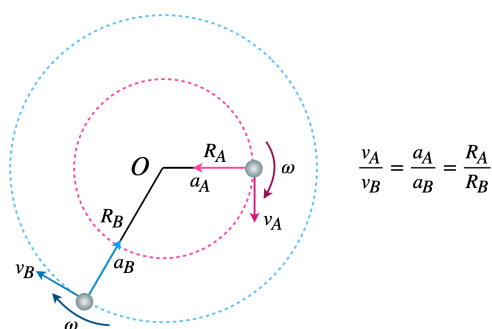
向心加速度 做圆周运动的物体指向圆心的加速度，记作 a_n 。其大小满足

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = \frac{4\pi^2}{T^2} R$$

3. 常见传动装置

Case1 同轴传动 两个小球 A 、 B 固定在同一根转轴的不同圆盘上，绕中心点 O 旋转。

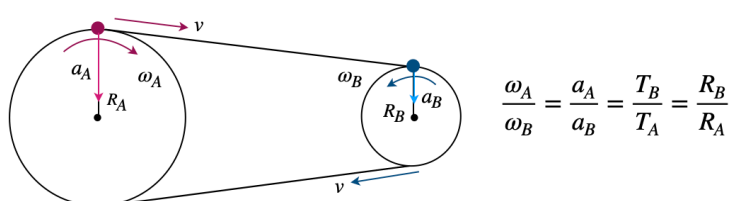
结论 角速度 ω 、周期 T 、频率 f 相同；线速度 v 和向心加速度 a 与轨道半径成正比。



$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{a_A}{a_B} = \frac{R_A}{R_B}$$

Case2 皮带传动 两个轮子通过皮带相连且不打滑，小球A和B分别位于两轮边缘。

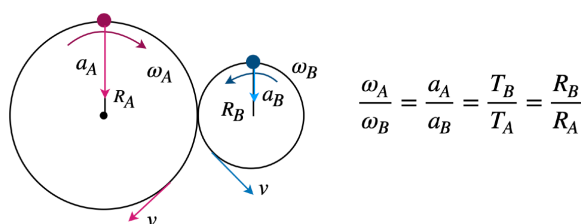
结论 线速度 v 相同；角速度 ω 、向心加速度 a 与半径成反比；周期 T 与半径成正比。



$$\frac{\omega_A}{\omega_B} = \frac{a_A}{a_B} = \frac{T_B}{T_A} = \frac{R_B}{R_A}$$

Case3 摩擦传动 两个摩擦轮通过接触点的摩擦力进行传动，小球A和B分别位于两轮边缘。

结论 线速度 v 大小相同，方向相反；角速度 ω 、向心加速度 与半径成反比；周期 T 与半径成正比。



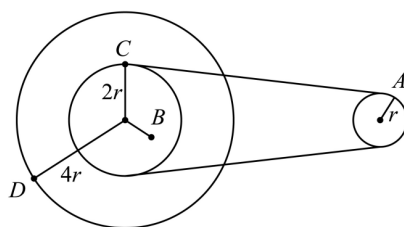
$$\frac{\omega_A}{\omega_B} = \frac{a_A}{a_B} = \frac{T_B}{T_A} = \frac{R_B}{R_A}$$

Case4 齿轮传动 两个齿轮相互啮合，其齿数 N_A 、 N_B 正比于齿轮半径。

结论 传动时啮合点的线速度 v 大小相同；两轮的角速度 ω 、向心加速度 a 与齿数（或半径）成反比；周期 T 与齿数（或半径）成正比。

理解 同轴传动中各点的角速度相同，接触类型的传动线速度大小相等。

EXAMPLE 1 如图所示是一皮带传动装置示意图，右轮半径为 r ，A是它边缘上的一点；左侧是一轮轴，大轮半径为 $4r$ ，小轮半径为 $2r$ ，B点在小轮上，到轮轴的距离为 r ，C点和D点分别位于小轮和大轮的边缘上，如果传动过程中皮带不打滑，则关于A、B、C、D四点的比较，下列说法正确的是



A. $v_A : v_B : v_C = 1 : 2 : 1$

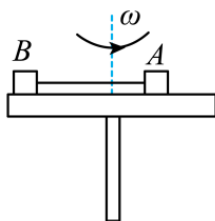
B. $\omega_A : \omega_B : \omega_C = 2 : 1 : 2$

C. $a_A : a_B : a_C = 2 : 1 : 1$

D. $a_A : a_C : a_D = 2 : 1 : 2$

解析

对于A，同皮带传动时有 $v_A = v_C$ ，又因为B、C、D点位于同一个转轮上，所以 $\omega_B = \omega_C$ ，且 $r_C : r_B = 2 : 1$ ，根据线速度表达式 $v = \omega r$ ，可得 $v_A : v_B : v_C = 2 : 1 : 2$ ，故A错误；



分析 阶段1 外侧物体 B 因其半径 r_B 更大, 会先达到滑动临界, 则 $\omega_1 = \sqrt{\frac{\mu g}{r_B}}$;

阶段2 当 $\omega > \omega_1$ 时绳子张紧, 为 B 提供向心力, 对 A 、 B 进行隔离分析

$$f_A + T = m_A \omega^2 r_A, \quad T + \mu m_B g = m_B \omega^2 r_B$$

联立解得 $f_A = \mu m_B g - (m_B r_B - m_A r_A) \omega^2$:

Case1 当 $m_B r_B - m_A r_A = 0$ 时, $f_A = \mu m_B g$, 此时不管 ω 如何增加, f_A 始终为定值不发生改变, 所以 A 与 B 永远不发生滑动;

Case2 当 $m_B r_B - m_A r_A > 0$ 时, 随着 ω 增大, f_A 减小直到为0, 之后反向增大直到达到最大静摩擦力, 此时达到临界角速度 ω_2 ;

Case3 当 $m_B r_B - m_A r_A < 0$ 时, 随着 ω 增大, f_A 增大直到达到最大静摩擦力, 此时达到临界角速度 ω_3 。

统一临界角速度计算 尽管 **Case2** 和 **Case3** 的中间过程不同, 但通过整体法分析得到它们最终的临界角速度是统一的, 即

$$\omega_2 = \omega_3 = \sqrt{\frac{\mu(m_A + m_B)g}{|m_A r_A - m_B r_B|}} = \sqrt{\frac{\mu g}{r_c}}, \quad \text{其中 } r_c = \frac{|m_A r_A - m_B r_B|}{m_A + m_B}$$

对于这个结论, 我们同样可以通过质心分析得到, 详见下文。

4. 多物体水平圆盘系统的质心判据

对于多个物体组成的水平圆盘系统, 逐个研究物体可以判断摩擦力、绳子拉力以及各阶段的运动趋势。但当系统即将发生**整体共同滑动**时, 某些模型的临界角速度可以借助质心运动定理统一表示。

注意 质心法研究的是系统所受外力与质心运动之间的关系, 不能代替各物体的受力分析, 也不能直接判断哪个物体最先达到局部滑动临界。后续例题的解析中也不采取这种方法。读者自己用来快速验证即可。

质心运动分析 由质心运动定理可得, $a_C = \omega^2 r_C$ (有关质心基础内容详见动量章节)

理解 当系统内各物体保持相对位置不变, 并以相同角速度绕圆心转动时, 系统质心也以角速度 ω 绕圆心做匀速圆周运动。

系统所受水平外力 根据质心运动定理, 系统所受合外力满足 $\sum \vec{F} = M \vec{a}_C$ 。对于多个物体组成的系统:

- (1) 各物体之间的绳子拉力属于内力, 求和后相互抵消;
- (2) 各物体的重力和圆盘支持力位于竖直方向;
- (3) 系统所受的水平外力只有圆盘对各物体的静摩擦力。

因此 $\sum_i \vec{f}_i = M \vec{a}_C$, 代入质心加速度, 得 $\sum_i \vec{f}_i = -M \omega^2 \vec{r}_C$ 。也就是说, 各物体所受静摩擦力的矢量和必须提供质心运动所需的向心力。取大小, 有

$$\left| \sum_i \vec{f}_i \right| = M \omega^2 r_C$$

摩擦力给出的必要条件 若各物体与圆盘之间的静摩擦因数均为 μ , 且竖直方向均满足 $N_i = m_i g$, 则则每个物体所受静摩擦力满足

$$|\vec{f}_i| \leq \mu m_i g$$

利用三角不等式, $\left| \sum_i \vec{f}_i \right| \leq \sum_i |\vec{f}_i| \leq \sum_i \mu m_i g$, 即 $\left| \sum_i \vec{f}_i \right| \leq \mu M g$ 。又因为 $\left| \sum_i \vec{f}_i \right| = M \omega^2 r_C$, 所以系统保持相对圆盘静止必须满足

$$M \omega^2 r_C \leq \mu M g \Rightarrow \omega \leq \sqrt{\frac{\mu g}{r_C}}$$

至此, 我们得到了临界角速度的上界, 但要严谨的说明真实临界角速度 $\omega_c = \sqrt{\frac{\mu g}{r_C}}$, 即能取到等号, 我们还需进一步分析。

分析 上述推导中使用了 $\left| \sum_i \vec{f}_i \right| \leq \sum_i |\vec{f}_i| \leq \mu M g$, 要使两处不等号同时取等, 必须满足:

- (1) 各物体所受静摩擦力同时达到最大值;
- (2) 各静摩擦力在空间中方向相同;
- (3) 这些摩擦力的共同方向与质心加速度方向一致;
- (4) 各物体的受力方程仍能同时成立。

只有这些条件全部满足时, 才有 $\left| \sum_i \vec{f}_i \right| = \sum_i |\vec{f}_i| = \mu M g$ 此时才可得到系统整体滑动的真实临界角速度

注意 因此, 质心公式不能脱离具体受力条件直接套用。必须先通过分物体受力分析, 确认上述取等条件能够实现。

同侧有绳模型 在系统整体滑动的临界状态下, 两物体所受静摩擦力均指向圆心, 并同时达到最大值:

$$f_a = \mu m_a g, f_b = \mu m_b g$$

因此, 两个摩擦力在空间中同向, 满足质心判据, 故

$$\omega_c = \sqrt{\frac{\mu g}{r_C}} \Rightarrow \omega_c = \sqrt{\frac{\mu(m_a + m_b)g}{m_a r_a + m_b r_b}}$$

再次强调 质心判据给出的是系统整体滑动的临界状态, 而不是外侧物体最先达到摩擦极限的第一个临界状态。第一个临界仍应由外侧物体的受力分析得到。

异侧有绳模型 以 $m_A r_A > m_B r_B$ 为例质心位于物体 A 一侧, 质心的向心加速度指向另一侧。在最终临界状态下: 物体 A 所受静摩擦力指向圆心; 物体 B 所受静摩擦力背离圆心。满足质心判据, 故

$$\omega_c = \sqrt{\frac{\mu(m_A + m_B)g}{|m_A r_A - m_B r_B|}}$$

总结 质心判据的作用可以概括为:

- (1) 它研究的是系统的整体临界;
- (2) 它不能判断哪个物体首先达到局部临界;
- (3) 它首先给出的是必要条件;
- (4) 只有确认各摩擦力能同时达到最大值并沿同一方向时, 才能得到真实临界角速度。

因此, 正确的使用顺序应为:

先分物体分析 → 判断摩擦力方向及取值 → 再用质心运动定理统一整体临界

不能写成 把整个系统直接等效成位于质心处的单个物体。

理解 因为系统质心处并不存在实际接触面, 也不存在作用于质心处的“最大静摩擦力”。

5. 多物体叠放水平圆盘问题

模型概述 若质量分别为 m_A, m_B 的两个物体 A 和 B 叠放在一起, 置于绕中心轴转动的水平圆盘上, 分析当 A、B 之间及 B 与圆盘之间的动摩擦因数 μ_A, μ_B 相同或不同时, 二者发生相对滑动或整体滑动的临界条件。

- A. 小物块A的向心加速度大小等于小物块B的向心加速度大小
 B. A、B受到的摩擦力不可能同时为0
 C. 若A不受摩擦力，则B受沿容器壁向上的摩擦力
 D. 若B不受摩擦力，则A受沿容器壁向上的摩擦力

解析

对于A，小物块A、B随容器转动且相对容器壁静止，则两者具有相同的角速度，根据向心加速度公式知

$$a_A = \omega^2 h \tan \alpha, \quad a_B = \omega^2 h \tan \beta$$

由于 $\alpha < \beta$ ，则 $\tan \alpha < \tan \beta$ ，得 $a_A < a_B$ ，故A错误；

对于B，若A不受摩擦力时，角速度为 ω_1 ，则有

$$\frac{mg}{\tan \alpha} = m \omega_1^2 h \tan \alpha$$

若B不受摩擦力时，角速度为 ω_2 ，则有

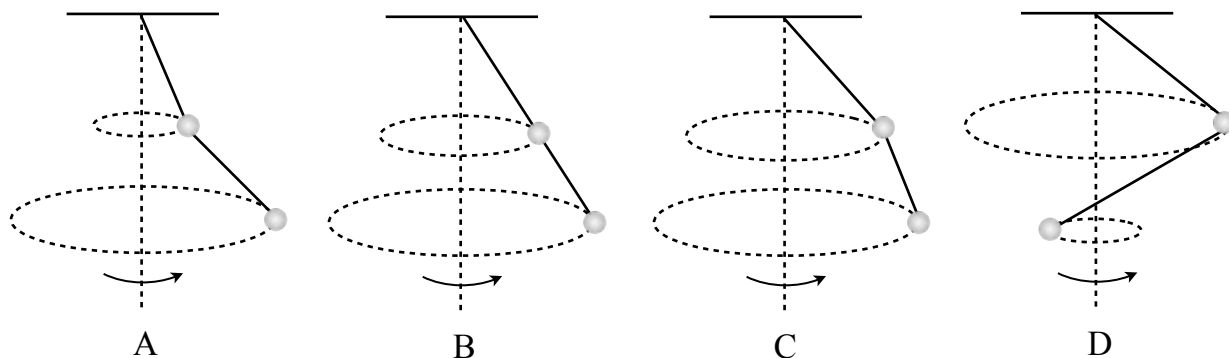
$$\frac{mg}{\tan \beta} = m \omega_2^2 h \tan \beta$$

得 $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\tan \beta}{\tan \alpha}$ ，由于 $\alpha < \beta$ ，则 $\tan \alpha < \tan \beta$ ，得 $\omega_1 > \omega_2$ ，A、B受到的摩擦力不可能同时为零，故B正确；

对于C，由B项分析可知，A的临界角速度大于B的临界角速度，若A不受摩擦力，则B受沿容器壁向下的摩擦力，故C错误；

对于D，由B项分析可知，A的临界角速度大于B的临界角速度，若B不受摩擦力，则A受沿容器壁向上的摩擦力，故D正确。综上，选BD。

EXMAPLE 7 (多选) 如图所示，两条不可伸长轻绳分别连接质量相同的两个可视为质点的小球，悬挂在天花板上。若两个小球能以相同的角速度在水平面内做匀速圆周运动，则关于两小球的位置关系，可能是下列图中的



解析

法一 对两球整体，由牛顿第二定律得 $\tan \alpha = \frac{m \omega^2 r_1 + m \omega^2 r_2}{2mg}$

对下方球，由牛顿第二定律得 $\tan \beta = \frac{m \omega^2 r_2}{mg}$

当 $r_2 > r_1$ 时， $\beta > \alpha$ ，故A正确；对于D，同理可得

$$\tan \alpha = \frac{m \omega^2 r_1 - m \omega^2 r_2}{2mg}, \quad \tan \beta = \frac{m \omega^2 r_2}{mg}$$

当 $\alpha = \beta$ 时， $3r_2 = r_1$ ，有可能正确。综上，选AD。

CHAPTER 7

天体运动

一. 万有引力定律

1. 认识万有引力

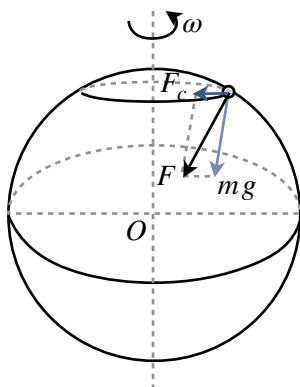
万有引力 自然界中任意两个具有质量的物体之间都存在的一种相互吸引力.

万有引力定律 万有引力的大小满足 $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$. 其中, 距离 r 为两物体质心间距离, G 为万有引力常量.

注意 当物体的大小相对于两物体间距离不可忽略时, 不能再把物体直接视为质点. 此时应将物体分割为质量元, 利用万有引力定律求和或积分. 对于球对称物体, 其外部引力场可等效为全部质量集中在球心处产生的引力场.

2. 重力与万有引力

前文我们提到万有引力的方向直接指向物体质心, 而我们又常用竖直向下描述重力的方向. 置于地球两极稍扁、赤道略鼓的现实情况下, 我们不难发现重力和万有引力的方向并不一致. 这是由于地球在自转, 除两极外的地表上的物体都在随地球做圆周运动, 所以物体必须需要一个向心力来维持圆周运动, 其由万有引力的部分水平分力提供, 受力分析如图所示:



分析

此时万有引力可分解为 $\vec{F} = m\vec{g} + \vec{F}_c$. 其中 $\vec{F}_c$ 为向心力, 受纬度 φ 影响, 即有

$$\vec{F}_c = m\omega^2 R \cos \varphi$$

当 $\varphi = 90^\circ$ 时, 即位于南北极时, $\cos \varphi = 0$, 则有

$$\vec{F}_c = 0, \vec{F} = m\vec{g}$$

此时 g 值取得最大值

EXAMPLE 1 由于地球自转的影响, 地球表面的重力加速度会随纬度的变化而有所不同. 已知地球表面两极处的重力加速度大小为 g_0 , 在赤道处的重力加速度大小为 g , 地球自转的周期为 T , 引力常量为 G . 假设地球可视为质量均匀分布的球体, 下列说法正确的是

- A. 质量为 m 的物体在地球北极受到的重力大小为 mg
- B. 质量为 m 的物体在地球赤道上受到的万有引力大小为 mg

C. 地球的半径为 $\frac{(g_0 - g)T^2}{4\pi^2}$

已知量	r 、 T	r 、 v	v 、 T	g 、 R
公式	$\frac{GMm}{r^2} = m \frac{v^2}{r} = m \frac{4\pi^2}{T^2} r$			$\frac{GMm}{R^2} = mg$
中心天体质量	$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$	$M = \frac{rv^2}{G}$	$M = \frac{v^3 T}{2\pi G}$	$M = \frac{gR^2}{G}$

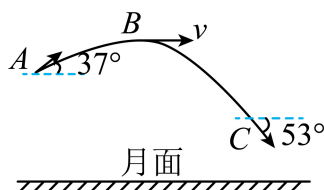
中心天体密度计算

中心天体密度计算

已知量	r 、 T 、 R	g 、 R
公式	$\frac{GMm}{r^2} = m \frac{4\pi^2}{T^2} r$ 、 $M = \frac{4}{3}\rho\pi R^3$	$\frac{GMm}{R^2} = mg$ 、 $M = \frac{4}{3}\rho\pi R^3$
中心天体密度	$\rho = \frac{3\pi}{GT^2} \cdot \frac{r^3}{R^3}$	$\rho = \frac{3g}{4\pi GR}$

注意 $r = R \Rightarrow \rho = \frac{3\pi}{GT^2}$ ，只要卫星贴近天体表面，知道其周期 T 就可直接求天体平均密度。

EXAMPLE 1 中国计划在2030年前登上月球，假设宇宙飞船落到月面前绕月球表面附近做角速度为 ω 的匀速圆周运动。宇航员登上月球后，做了一次斜上抛运动的实验，如图所示，在月面上，小球从 A 点斜向上抛出，经过最高点 B 运动到 C 点，已知小球在 A 、 C 两点的速度与水平方向的夹角分别为 37° 、 53° ，小球在 B 点的速度大小为 v ，小球从 A 点到 C 点的运动时间为 t ，引力常量为 G ， $\sin 37^\circ = 0.6$ ， $\cos 37^\circ = 0.8$ ，月球可视为均匀球体，忽略月球的自转，下列说法正确的是



- A. 月球的密度为 $\frac{4\omega^2}{3\pi G}$ B. 月球表面的重力加速度大小为 $\frac{7v}{12t}$
- C. 月球的第一宇宙速度大小为 $\frac{25v}{12\omega t}$ D. 月球的半径为 $\frac{12v}{5\omega^2 t}$

解析

对于A，飞船落到月面前绕月球表面附近做角速度为 ω 的匀速圆周运动，则 $G \frac{Mm}{R^2} = m\omega^2 R$ ，又

$M = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$ ，联立解得月球的密度为 $\rho = \frac{3\omega^2}{4\pi G}$ ，故A错误；对于B，在A点时的竖直分速度大小为

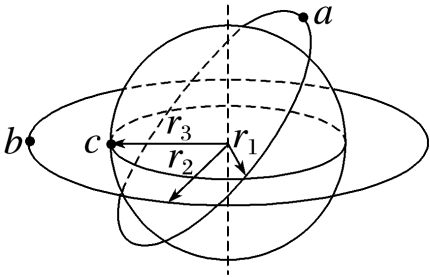
$v_{Ay} = v \tan 37^\circ = \frac{3}{4}v$ ，在C点时的竖直分速度大小为 $v_{Cy} = v \tan 53^\circ = \frac{4}{3}v$ 。向上为正，从A到C由运动学公

式得 $-v_{Cy} = v_{Ay} - gt$ ，解得 $g = \frac{25v}{12t}$ ，故B错误；对于C、D，因为 $G \frac{Mm}{R^2} = mg = m\omega^2 R$ ，所以月球的半径为

$R = \frac{g}{\omega^2} = \frac{25v}{12\omega^2 t}$ ，月球的第一宇宙速度大小等于卫星在月球表面轨道绕月球做匀速圆周运动的线速度，则

$v_1 = \omega R = \frac{25v}{12\omega t}$ ，故C正确，D错误。综上，选C。

典例分析 一个天体拥有两个不同轨道上的卫星*a*、*b*，其中*a*所处近地轨道，*b*所处同步轨道。另有一个参照物*c*在赤道上。现比较三者的线速度、角速度、公转周期、万有引力提供的加速度。

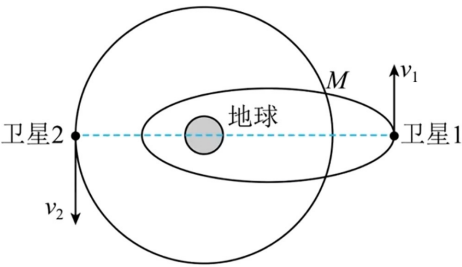


比较对象	近地卫星 <i>a</i>	同步卫星 <i>b</i>	赤道上物体 <i>c</i>
轨道半径	r_1	r_2	r_3
向心力来源	万有引力	万有引力	万有引力与地面支持力
半径关系	$r_1 = r_3 < r_2$		
角速度	$\omega_1 > \omega_2 = \omega_3$		
线速度	$v_1 > v_2 > v_3$		
向心加速度	$a_1 > a_2 > a_3$		

总结 高轨低速长周期；低轨高速短周期。

理解 在根据引力势能公式 $E = -\frac{GMm}{r}$ 可知，距离中心天体越远，环绕天体的引力势能越大，即高轨=能量高。而对于平方反比引力场，还有一个特殊的定量关系 对于圆轨道，任意时刻都有：动能的大小等于总能量的绝对值，而势能是总能量的两倍。这就导致，当一个高速低轨物体尝试升轨时，从外部注入系统的能量不仅没有变成动能，反而要补贴给势能，进而导致动能减少，速度降低。

思考 如下图所示情景， v_1 和 v_2 的大小关系如何？



答案 $v_1 < v_2$ 。不妨以卫星1图中对地距离为半径，构造圆形环绕轨道。根据变轨能量关系可知，卫星1在椭圆轨道右顶点处的速度 v_1 小于圆轨道上速度 v_{circle} 。而根据所学结论可知，由于构造圆形轨道半径大于卫星2运动半径，则 v_{circle} 小于 v_2 ，那么就有 $v_1 < v_{\text{circle}} < v_2$ 。

EXAMPLE 1 某国产手机新品上市，持有该手机者即使在没有地面信号的情况下，也可以拨打、接听卫星电话。为用户提供语音、数据等卫星通信服务的“幕后功臣”正是中国自主研发的“天通一号”卫星系统，该系统由“天通一号”01星、02星、03星三颗地球同步卫星组成。已知地球的自转周期为 T ，地球的半径为 R ，该系统中的卫星距离地面的高度为 h ，电磁波在真空中的传播速度为 c ，引力常量为 G 。下列说法正确的是

- A. 可求出地球的质量为 $\frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}$

$$G \frac{m_2}{L^2} = \omega^2 r_1 = \frac{4\pi^2 r_1}{T^2}, \quad G \frac{m_1}{L^2} = \omega^2 r_2 = \frac{4\pi^2 r_2}{T^2}, \quad m_1 \omega^2 r_1 = m_2 \omega^2 r_2$$

可得结论

$$\omega_1 = \omega_2, \quad T = \sqrt{\frac{4\pi^2 L^3}{G(m_1 + m_2)}}, \quad \omega = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{L^3}}, \quad m_1 r_1 = m_2 r_2$$

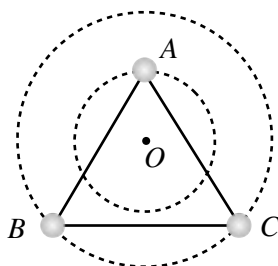
除了简单的双星系统，同样常见的是多星系统，而多星系统也具有许多类似的性质：

(1) 各天体各自环绕系统质心旋转

(2) $\sum \vec{P}_i$ 总动量为零

这两个性质十分简明，我们不妨在解决 **EXAMPLE 1** 的过程中逐步理解。

EXAMPLE 1 如图所示，A、B、C 三颗星体分别位于等边三角形的三个顶点上，在相互之间的万有引力作用下，绕圆心 O 在三角形所在的平面内做匀速圆周运动， $r_{BO} = r_{CO} = 2r_{AO}$ ，忽略其他星体对它们的作用，则下列关系正确的是



A. 星体的线速度大小 $v_A = v_B$

B. 星体的加速度大小 $a_A = \frac{1}{2}a_B$

C. 星体所受合力大小 $F_A = F_B$

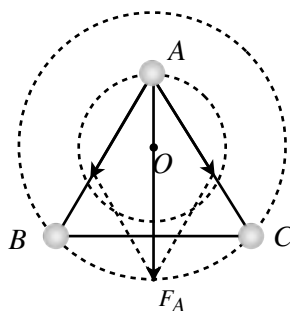
D. 星体的质量 $m_A = m_B$

解析

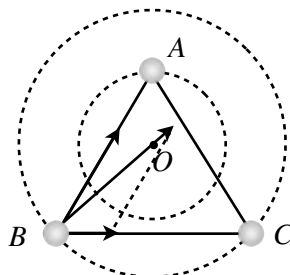
对于A，三星系统是三颗星都绕同一圆心 O 做匀速圆周运动，由此它们转动的角速度相同，由线速度与角速度的关系公式 $v = \omega r$ ，可知星体的线速度大小 $v_A = \frac{1}{2}v_B$ ，故A 错误；对于B，由于总动量为零，则有

$$\omega r_{AO} = \omega r_{BO} = 2\omega r_{AO},$$

则有 $a_A = \frac{1}{2}a_B$ ，故B正确；对于C、D，三颗星体都绕同一圆心 O 做匀速圆周运动，因此可得星体 A、B 受力如图：



由图 A、B 间的万有引力大小等于 A、C 间的万有引力大小，B、C 间的万有引力大小小于 A、B 间的万有引力大小，分力的夹角相等，因此 $F_A > F_B$ ，故C错误；



CHAPTER 8

功能关系

一. 动能与功

1. 动能与其时间变化率——功

动能定义 对于一个质点，质量为 m ，速度为 v 时，它的动能表达式为 $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ ，单位为焦耳（J）。

功的定义 作用于物体的力在物体位移方向上的分量与该位移大小的乘积称为功，记为 W 。

做功要素 存在作用在物体上的力，**物体在力的方向上发生位移。**

公式 假设物体从 A 点运动到 B 点的过程中，力对物体所作的总功为，各段微小位移 dx 上的微小功 dW （称为元功）的总和，即

$$W = \int_{x_A}^{x_B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$$

深度理解 高中阶段，不考察微积分知识，如求解复杂曲线上做功情况，大多为**直线恒力作功**，表达式简化为

$$W = \int_{x_A}^{x_B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = F \int_{x_A}^{x_B} \cos \alpha \cdot dx = F \cdot x \cos \alpha$$

其中， α 是力与位移方向之间的夹角， x 为物体的位移。

功的性质

(1) **功是标量** 由上述表达式可知，功 W 的正负与力和位移之间的夹角有关。

b. 当 $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ 时， $W > 0$ ，力对物体做正功；

c. 当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时， $W = 0$ ，力对物体不做功；

d. 当 $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$ 时， $W < 0$ ，力对物体做负功，等价于物体克服这个力做功。

同样因为功为标量，对于多个力做功求总功时，我们可以先求各个力做功 $W_1, W_2, W_3, \dots$ ，再对这些功直接代数相加得到总功 $W = W_1 + W_2 + W_3 + \dots$ ，或者先求合外力，直接求解总功。

(2) **功是过程量** 由功的定义可知，功是力对空间上的累积，与物体历的某一段运动过程相关，讨论某时刻的功是没有意义的。

(3) **功是相对量** 由于计算功的过程中涉及到了与参考系选取有关的位移，故功也与参考系选取有关，在高中阶段进行功的计算时一般默认为选取地面或相对地面静止的物体作为参考系。

(4) **一对相互作用力的功取决于它们的相对位移** 设两物体质量分别为 m_1, m_2 ，两物体间相互作用力大小为 F ， m_1 位移为 dx_1 ， m_2 位移为 dx_2 ，则在这段微小位移下，相互作用力所做总功为

$$dW = dW_1 + dW_2 = F \cdot dx_1 - F \cdot dx_2 = F \cdot (dx_1 - dx_2) = F \cdot d\Delta x$$

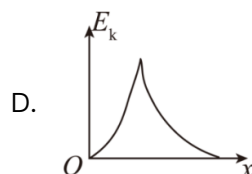
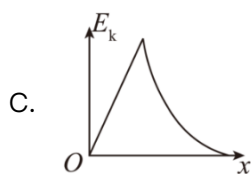
其中， Δx 为物体间相对位移，**其与参考系的选取无关**，当 垂直于 Δx 或 $\Delta x = 0$ 时，总功为0。其余情况下不为0，不要想当然的认为相对作用力等大反向，因此所做总功一定为0。

理解 对于外力所做的负功，通常还有另一种说法，即克服某种力做功多少，例如：摩擦力对物块做功-20J 的另一种说法为，物块克服摩擦力做功20J。

二. 功率

定义 单位时间内力所做的功，记为 P ，国际单位制中单位为焦耳每秒 ($J \cdot s^{-1}$)，称为瓦特 (W)。

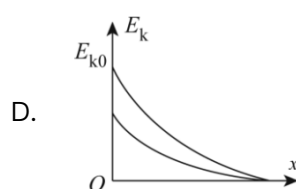
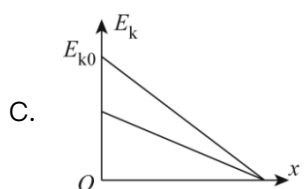
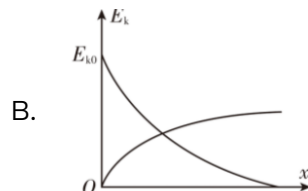
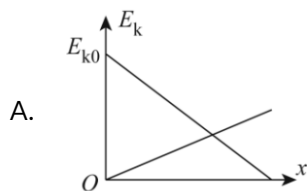
物理意义 描述力对物体做功的快慢。



解析

物块先下滑加速，在水平被摩擦减速，两段过程所受均为恒力，故斜率为定值，图像应为两段直线组成。综上，答案为A。

EXAMPLE 7 一小物块沿斜面向上滑动，然后滑回到原处。物块初动能为 E_{k0} ，与斜面间的动摩擦因数不变，则该过程中，物块的动能 E_k 与位移 x 关系的图像是



解析

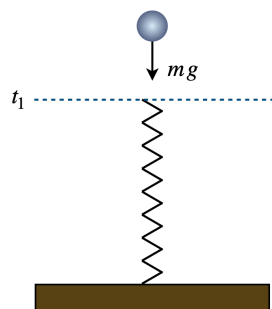
物块两段运动所受为恒力，图像应为两条直线，且滑回原处的时候物块具有动能，即 $x = 0$ 处动能不为0。综上，答案为C。

九. 弹簧振子问题

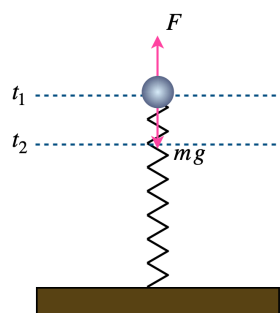
1. 基础弹簧振子问题

基础模型 假设现有一质量为 m 的小球在空中自由下落（不计空气阻力），碰到竖直轻质弹簧，设接触到弹簧、弹簧弹力与重力相等和小球下落到最低点的时刻分别为 t_1 、 t_2 和 t_3 。

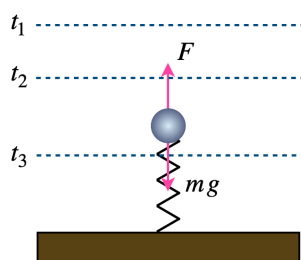
$0 \sim t_1$ 阶段 小球处于自由落体阶段，只受重力 mg 作用，加速度 $a = g$ ，重力势能 $\rightarrow$ 动能。



$t_1 \sim t_2$ 阶段 小球受弹簧弹力 F 作用，($F \leq mg$)，加速度 $a = g - \frac{F}{m}$ ，随 $F \uparrow a \downarrow$ ，在 t_2 时刻弹力 $F = mg$ ，加速度 $a = 0$ ，速度达到最大值 v_m ，重力势能 $\rightarrow$ 动能 + 弹性势能。



$t_2 \sim t_3$ 阶段 弹簧弹力 $F > mg$, $a = g - \frac{F}{m} < 0$, 小球做加速度增大的减速运动, 在 t_3 时刻弹力 F 达到最大值, 速度 $v = 0$ (最低点), 动能 + 重力势能 $\rightarrow$ 弹性势能。



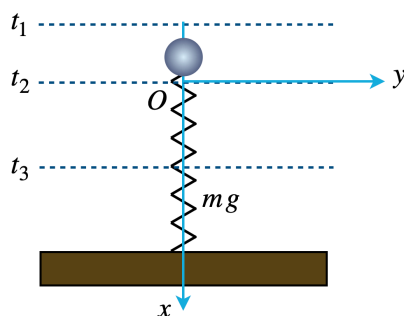
$v-t$ 图像

分析 设 t_1 时刻初速度为 v_0 , 若将平衡位置设为原点, 如下图所示设立 $O-x$ 轴, 则有

$$F_{\text{合}} = mg - k\left(\frac{mg}{k} + x\right) = -kx$$

此时小球所受合外力大小与位移成正比, 故做简谐运动, 若以 t_2 为起始时刻, 则设

$$x = A \sin \omega t, \quad v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos \omega t, \quad a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \sin \omega t$$



其中, A 为振幅, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}} = \sqrt{\frac{k}{m}}$, ω 为已知量, 仅剩振幅 A 为未知量, 求得 A 即可得知任意时刻

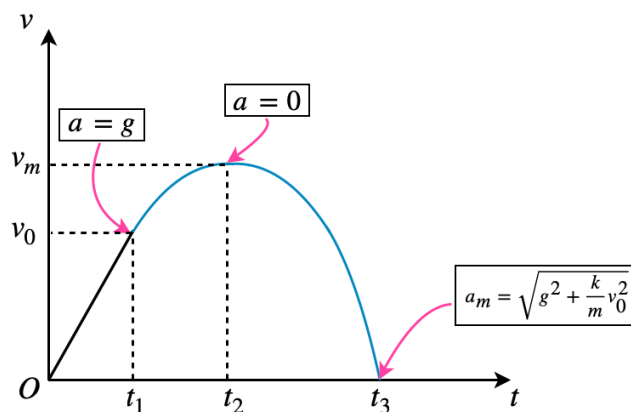
小球的运动情况, 下面利用 $v_m = A\omega$ 进行求解:

分析 对于 $t_1 \sim t_2$ 时间段, 由动能定理得

$$mgh + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_m^2 + E_p \Leftrightarrow mg \frac{mg}{k} + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2 \Rightarrow v_m = \sqrt{\frac{mg^2}{k} + v_0^2}$$

进一步解得 $A = \frac{v_m}{\omega} = \sqrt{\frac{m^2g^2}{k^2} + \frac{m}{k}v_0^2}$, 故 $a_m = A\omega^2 = \sqrt{g^2 + \frac{k}{m}v_0^2}$

综上, 在 $0 \sim t_1$ 阶段, 物体做自由落体运动, $t_1 \sim t_3$ 阶段物体做简谐运动, $v-t$ 图像如下图所示:



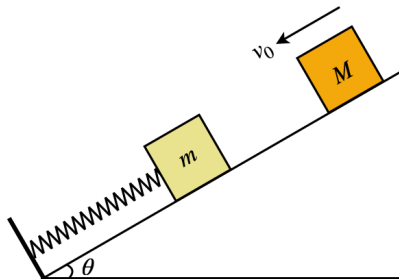
关键参数

- 初态与末态：在解决涉及弹簧的问题时应明确弹簧原长、形变量，物体位置与速度。
- 特殊位置：
 - 平衡位置：弹簧弹力等于重力 / 外力时，速度最大；
 - 静止位置：物体速度为0，相对于平衡位置位移达到最大值，加速度也达到最大值。

2. 弹簧振子模型拓展

倾斜弹簧振子

现有一质量为 m 的小物块连接在弹簧上，静止在倾角为 θ 的光滑斜面上，在小物块上面释放一质量为 M 的木箱，设与小物块相碰时速度为 v_0 ，后二者黏在一起继续运动，试分析后续运动状况。

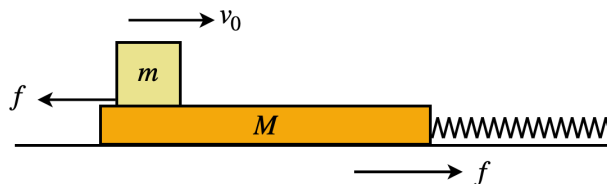


分析 在二者合为一体后，视为一新的物体，带有初速度对弹簧进行压缩，本质上与竖直弹簧振子没有区别，只不过在运动方向上除弹簧弹力外所受合力为重力的分量 $(m+M)g \sin \theta$ ，平衡位置为弹簧压缩量

$$\Delta x = \frac{(m+M)g \sin \theta}{k} \text{ 处，二者仍做简谐运动。}$$

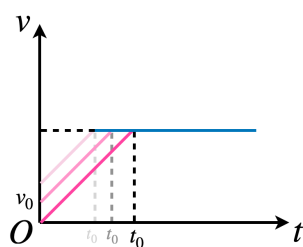
恒定摩擦弹簧振子

在光滑水平面上有一足够长质量为 M 的木板，现将一速度足够大，质量为 m 的小物块放在与弹簧相连的木板上，二者动摩擦因数为 μ ，试分析后续运动状况。



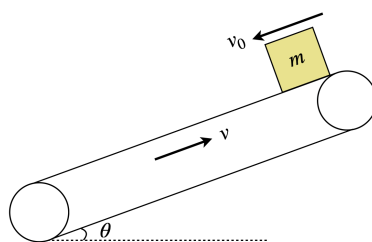
分析 由于小物块速度足够大，相对 M 总有向前运动的趋势，故所受动摩擦 f 向左，大小恒为 μmg ，故木板也受到向右大小也为 f 的恒力，等价于竖直弹簧振子中的重力，平衡位置为弹簧压缩量 $\Delta x = \frac{\mu mg}{k}$ 处，木板后续做简谐运动。

- (2) 当 $\mu > \tan \theta$ 时, $mg \sin \theta < \mu mg \cos \theta$, 物体加速度 $a = \mu g \cos \theta - g \sin \theta > 0$, 此时摩擦为滑动摩擦力 $f = \mu N$, 后加速至与传送带共速后匀速运动, 后续摩擦力为静摩擦 $f' = mg \sin \theta$ 。



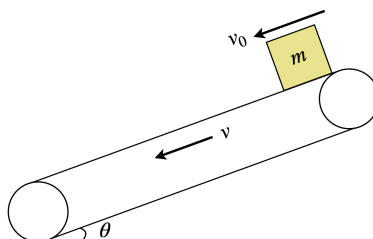
注意 同水平传送带模型, 要注意传送带长度是否足够物体做完整的加速运动, 且下文讨论情况均假设传送带足够长。

Case2 初速度 $0 \leq v_0 < v$, 且与传送带反向



- (1) 当 $\mu < \tan \theta$ 时, $mg \sin \theta > \mu mg \cos \theta$, 加速度 $a = g \sin \theta - \mu g \cos \theta$ 沿斜面向下, 做匀加速运动;
- (2) 当 $\mu = \tan \theta$ 时, $mg \sin \theta = \mu mg \cos \theta$, 物体做匀速运动;
- (3) 当 $\mu > \tan \theta$ 时, $mg \sin \theta < \mu mg \cos \theta$, 加速度 $a = \mu g \cos \theta - g \sin \theta$ 沿斜面向上, 做匀减速运动, 减速为 0 后反向做匀加速运动, 与前文 (水平传送带 v_0 与 v 反向) 情况类似, 当 $v_0 > v$ 时, 返回速度为 v , 当 $v_0 < v$ 时, 返回速度为 v_0 。

倾斜下行类传送带

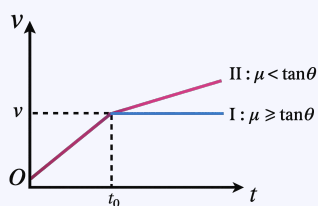


Case1 初速度 $0 \leq v_0 < v$, 且与传送带同向

分析 物体受沿斜面向下的摩擦力, 加速度 $a = \mu g \cos \theta + g \sin \theta$, 做匀加速运动;

共速后, 分析打滑情况:

- (1) 当 $\mu \geq \tan \theta$ 时, $\mu mg \cos \theta \geq mg \sin \theta$, 物体后续受静摩擦力 $f = mg \sin \theta$, 做匀速运动;
- (2) 当 $\mu < \tan \theta$ 时, $\mu mg \cos \theta < mg \sin \theta$, 加速度 $a = g \sin \theta - \mu g \cos \theta$, 继续做匀加速运动。



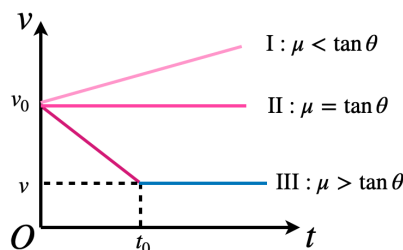
Case2 初速度 $v_0 > v$, 且与传送带同向

物体受到沿斜面向上的摩擦力

- (1) 当 $\mu < \tan \theta$ 时, $mg \sin \theta > \mu mg \cos \theta$, 加速度 $a = g \sin \theta - \mu g \cos \theta$ 沿斜面向下, 做匀加速运动;

(2) 当 $\mu = \tan \theta$ 时, $mg \sin \theta = \mu mg \cos \theta$, 物体做匀速运动;

(3) 当 $\mu > \tan \theta$ 时, $mg \sin \theta < \mu mg \cos \theta$, 加速度 $a = \mu g \cos \theta - g \sin \theta$ 沿斜面向上, 做匀减速运动, 共速后做匀速运动。



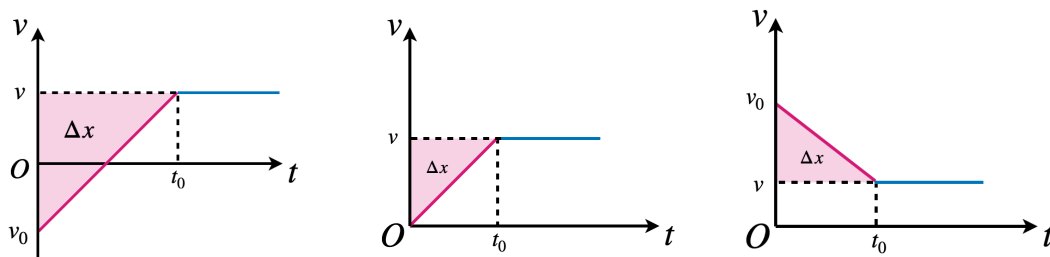
4. 划痕长度问题

划痕是物体与传送带发生相对滑动时, 摩擦留下的痕迹, 其长度由“**相对滑动阶段的相对位移**”决定, 但需要严格区分“单向滑动”和“双向滑动”。

单向滑动 此时没有划痕的叠加现象, 在共速后不发生相对滑动, 划痕长度等于相对位移。

STEP 1 画出物块与传送带的 $v-t$ 图像;

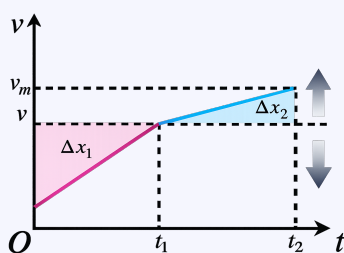
STEP 2 计算二者的相对位移, 对应传送带与物块图像围成的面积。利用上述分析过程图像举例, 则划痕长度 Δx 如下图所示:



双向滑动 此时有划痕的叠加现象, 共速后仍发生相对滑动, 划痕长度仅为相对位移的最大值。

典例分析 现有一物块以沿传送带向下的初速度 v_0 , 放置于倾角为 θ 的传送带顶端, 传送带与物块间摩擦因数为 $\mu < \tan \theta$, 传送带速度为 $v > v_0$, 长度足够物块与其共速, 最后滑落传送带时速度为 v_m , 试求该过程物块与传送带间划痕长度 Δx 。

分析 画出 $v-t$ 图像, 与单向滑动不同点在于共速后二者仍发生相对滑动, 导致共速后产生的划痕有部分被先前划痕所覆盖, 如下图所示, 产生两部分相对位移 Δx_1 与 Δx_2 。



在 $0 \sim t_1$ 阶段, 物块相对传送带向上滑, 留下的划痕在视觉上沿传送带向下延伸; 在 $0 \sim t_2$ 阶段, 物块相对传送带向下滑, 留下的划痕在视觉上沿传送带向上延伸; 故两次划痕“产生方向”不同, 最终可见的划痕长度取两阶段相对位移中的最大值, 即

$$\Delta x = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2\}$$

EXAMPLE 2 (多选) 如图甲所示, 足够长的水平传送带以恒定速率 $v = 2 \text{ m/s}$ 逆时针转动, 一质量 $m = 1 \text{ kg}$ 的小物块从传送带的左端向右滑上传送带。小物块在传送带上运动时, 小物块的动能 E_k 与小物块的位移 x 的关系图像如图乙所示, 图中 $x_0 = 2 \text{ m}$, 取重力加速度 $g = 10 \text{ m/s}^2$ 。下列说法正确的是

CHAPTER 9

动量

一. 动量

1. 定义与特性

定义 质点的动量是质点质量与其速度的乘积，即

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

- (1) 矢量性：根据动量表达式可知，其为矢量，方向与速度 $\vec{v}$ 方向相同；
- (2) 瞬时性：动量是描述**某一时刻运动状态**的量，是状态量。因此，只讨论“某一时刻的动量”；
- (3) 相对性：由于速度与参考系的选择有关，因此动量也具有**相对性**（通常默认以地面为参考系）。

2. 力 — 质点动量的时间变化率

在力学章节部分，我们已明确“**力是改变物体运动状态的原因**”。下面我们从动量变化率的角度，重新认识力的本质：

质点动量的时间变化率 在牛顿力学中，合外力可表征质点动量随时间变化的快慢，即 $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

证明 质点动量随时间的变化率为 $\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$ 。由于质点运动速率远小于光速 ($v \ll c$) 时，忽略相对论影响，即质量不随时间变化 $\Leftrightarrow \frac{dm}{dt} = 0$ ，故 $\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$ 。结合牛顿第二定律 $\vec{F} = m\vec{a}$ ，我们得到了

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

推广 上述情况分析了单个质点的情况，下面我们将这一结论**推广到质点系下**，设系统由质量 m_1 、 m_2 、 m_3 、...、 m_N 的 N 个质点组成，第 i 个质点所受的外力和内力分别记为 F_i 和 F_{fi}

($i = 1, 2, 3, \dots, N$)，对第 i 个质点分析可得

$$F_i + F_{fi} = \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

对该质点系所有质点按照上述方程求和，系统内力相互抵消，即 $\sum_i F_{fi} = 0$ ，得

$$\sum_i F_i = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} \Leftrightarrow \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

形式上看上式与单质点公式相同，但需注意式中 $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \dots + \vec{p}_N$ 为系统总动量，因此上式说明**作用于系统的合外力等于系统总动量对时间的变化率**。

二. 动量定理

1. 冲量

定义 作用力 $\vec{F}$ 对一段时间的累积量称为力的冲量，单位为牛顿·秒 ($N \cdot s$)，用 I 表示

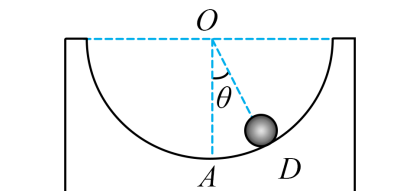
公式 对于极短时间内，我们定义冲量 $dI = F \cdot dt$

- (1) 矢量性：冲量为矢量，方向与质点动量的增量方向相同。

$$I_G + I_N + I_T = I_T = mv_0 - (-mv_0) = 2mv_0$$

故D错误，由于绳子的力方向始终发生改变，故每个极短时间内的 dI 方向不同，不可直接累加变成 Ft ，故C错误。综上，答案为A。

EXAMPLE 5 如图所示，水平面上固定一半圆形凹槽，凹槽的质量为 M ，半圆弧的圆心为 O 点，最低点为 A 点，半径为 R ，现将一质量为 m 的光滑小球从圆弧上的 D 点释放，已知 OD 与 OA 的夹角为 θ ($\theta < 5^\circ$)，重力加速度为 g ，小球大小可以忽略不计。从 D 点运动到 A 点的过程中，小球对凹槽的弹力的冲量大小为



A. $m\sqrt{\frac{\pi^2 g R}{4} + 2gR(1 - \cos \theta)}$

B. $M\sqrt{\frac{\pi^2 g R}{4} + 2gR(1 - \cos \theta)}$

C. $m\frac{\pi\sqrt{gR}}{2} + m\sqrt{2gR(1 - \cos \theta)}$

D. $M\frac{\pi\sqrt{gR}}{2} + M\sqrt{2gR(1 - \cos \theta)}$

解析

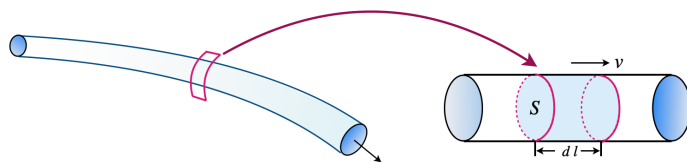
由于 $\theta < 5^\circ$ ，故小球做单摆运动，从 D 点到 A 点的过程中，小球运动时间 $t = \frac{1}{4}T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R}{g}}$ ，

根据动能定理有 $mgR(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}mv^2$ ，由动量定理有 $I_N = \sqrt{I_G^2 + (mv)^2}$ ，联立解得 $I_N = m\sqrt{\frac{\pi^2 g R}{4} + 2gR(1 - \cos \theta)}$ 。综上，选A。

3. 流体冲力问题

气体和液体统称为流体，它们均属于连续分布的介质，基本特征是具有流动性，在题目中常涉及求解流体撞击物体产生的冲力，或已知冲力反推流体的相关参数。

处理方法 可截取极短时间 dt 内通过某一截面的物质作为研究对象，再对其应用动量定理。



分析 如图，沿流速方向选取一段柱形流体微元。设流体密度为 ρ ，横截面积为 S ，极短时间 dt 内通过界面的柱形流体的长度为 dl ，则 dt 内的流体微元的质量 dm 为

$$dm = \rho S dl = \rho S v dt$$

设流体受到的反作用力为 F ，根据动量定理得

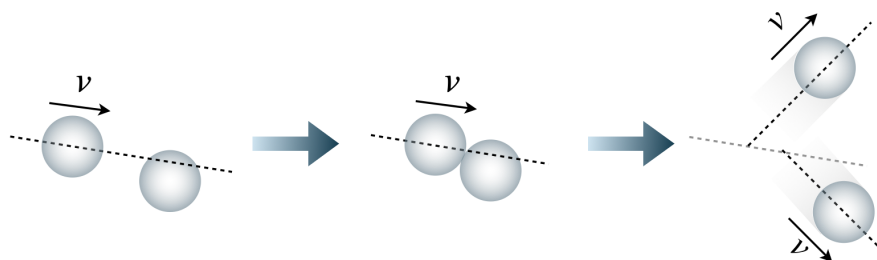
$$F \cdot dt = dm \cdot \Delta v$$

Case1 若流体作用后速度为0（射到靶上静止），即 $\Delta v = 0 - v = -v$ ，则有 $F = \frac{dm}{dt} \Delta v = -\rho S v^2$ ；

Case2 若流体作用后以速率 v 反弹，即 $\Delta v = -v - v = -2v$ ，则有 $F = \frac{dm}{dt} \Delta v = -2\rho S v^2$ 。

思考 上述对流体的分析过程能否进一步推广，例如对于连续的粒子流又该如何处理？

答案 对于离散的粒子流（如机枪扫射、沙子冲击），如果粒子分布均匀，可以将其等效为连续的“柱状流体”进行处理。



对心碰撞基本规律 此类碰撞必须遵循如下三条规律

动量守恒 $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$

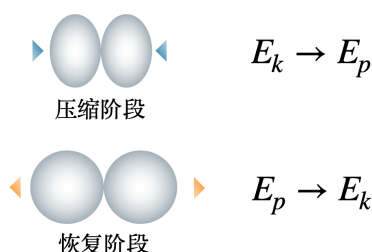
动能不增加 (系统的动能在碰撞中可能会减少, 但不会凭空增加) $E_{k1} + E_{k2} \geq E'_{k1} + E'_{k2}$

速度变化规律 碰后前方物体速度大于等于后方物体。

碰撞过程分析 如图, 两个小球的对心碰撞可以被分为两个阶段,

压缩阶段 两球接触并逐渐压缩, 部分动能转化为弹性势能。

恢复阶段 弹性势能重新转化为动能, 小球被弹开。



理解 若在碰撞后小球可完全恢复原状, 可简单理解为 E_p 完全转化为了 E_k , 故系统总动能没有损失。我们根据碰撞前后动能是否守恒, 将碰撞分为弹性碰撞和非弹性碰撞两大类。

2. 弹性碰撞 (Elastic Collision)

碰撞特征 碰撞过程中**动量守恒**, **动能守恒**。这是最理想的碰撞, 没有任何动能损失。

动碰静模型 运动的物体与静止不动的物体发生弹性碰撞。

典例分析 质量为 m_1 , 速度为 v_1 的 A 球与质量为 m_2 静止不动的 B 球发生弹性碰撞, 求撞后二者速度 v'_1 (A 球速度), v'_2 (B 球速度)。



结论 $v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$, $v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$

分析 对两个小球组成的系统, 由双守恒方程得

动量守恒: $m_1 v_1 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$

能量守恒: $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2$

联立解得

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1, \quad v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

注意 进行计算时不要忘记规定正方向, 将正负号代入计算。并且, 上述得出的计算结果结果需要背记, 要求熟练掌握动碰静结论。在解题中可避免反复的对双守恒方程进行求解。

直观理解

质量条件	碰后速度状态	宏观变化情况
$m_1 < m_2$	$v'_1 < 0$	两球反向运动
$m_1 = m_2$	$v'_1 = 0$	两球“交换速度”
$m_1 > m_2$	$v'_1 > 0$	两球同向运动
$m_1 \ll m_2$	$v'_1 \rightarrow -v_1, v_2 \rightarrow 0$	A 球几乎以反向速度反弹, B 球近似静止不动
$m_1 \gg m_2$	$v'_1 \rightarrow v_1, v_2 \rightarrow 2v_1$	A 球几乎保持速度不变, B 球以接近两倍 A 球速度弹出 (速度不会趋于无穷大)

动碰动模型 运动的物体与运动的物体发生弹性碰撞。

典例分析 质量为 m_1 , 速度为 v_1 的 A 球与质量为 m_2 , 速度为 v_2 的 B 球发生弹性碰撞, 求撞后二者速度 v'_1 、 v'_2 。

结论 $v'_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}$, $v'_2 = \frac{2m_1v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2}$ 。

分析 对两个小球组成的系统, 利用双守恒方程得

动量守恒

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v'_1 + m_2v'_2$$

能量守恒

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v'^2_1 + \frac{1}{2}m_2v'^2_2$$

联立解得

$$v'_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}, v'_2 = \frac{2m_1v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2}$$

拓展1 我们还有另一种思路来得到上述碰撞结论, 设某时刻两球共同速度为 v_g , 则有两个结论:

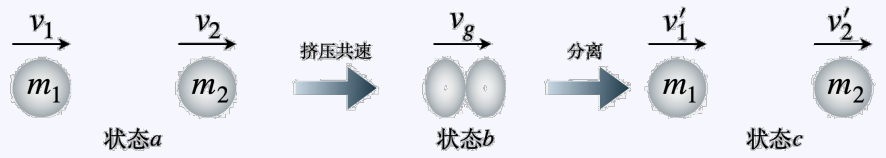
$$v_1 + v'_1 = v_2 + v'_2 = 2v_g \text{ 和 } v_1 - v_2 = -(v'_1 - v'_2) \text{ (即碰后相对速度大小不变, 方向相反)}$$

注意 在计算弹性碰撞结论时, 可先利用动量守恒快速计算出中间速度 v_g 再利用结论算出 v'_1 、 v'_2 。

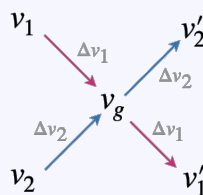
证明 如下图所示, 两球在碰撞过程即由状态 a 到状态 c 的过程。

$a \rightarrow b$ 阶段: 先进行挤压, 因此在某一时刻两球速度 v_g 相同。

$b \rightarrow c$ 阶段: 两球应经历 $a \rightarrow b$ 中挤压的逆向过程, 来恢复原来的形状。因此, 在共速前后 A、B 两球受到的作用效果是对称的。



因此, 从 $a \rightarrow b$, 再从 $b \rightarrow c$ 的过程中, 小球的速度变化量相同, 如下图所示



易知, v_1 、 v_g 、 v'_1 与 v_2 、 v_g 、 v'_2 均构成等差数列, 利用数学知识即可得到

$$v_1 + v'_1 = v_2 + v'_2 = 2v_g, \text{ 也即 } v_1 - v_2 = -(v'_1 - v'_2)$$

$$\frac{\sqrt{2\mu g d}}{2} < v_B < \frac{3}{2}\sqrt{2\mu g d}。$$

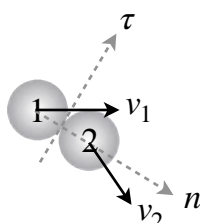
4. 非对心碰撞（拓展）

非对心碰撞考察极少，学有余力的读者可尝试阅读。高中阶段对于光滑小球之间的非对心碰撞，我们处理的核心思想是：建立以“连心线”为基准的坐标系，将二维问题转化为一维问题。

建议 本节内容涉及质心相关知识，建议读者先了解对应小节再继续学习。

法向连线 连接两球球心的直线称为连心线，法向，记为 n 轴；

切向连线 垂直于连心线且与接触面相切的直线称为切向，记为 τ 轴；



将碰前两球速度 v_1 ， v_2 分解到这两个方向上，得到法向分量 v_{1n} ， v_{2n} 和切向分量 $v_{1\tau}$ ， $v_{2\tau}$ 。由于我们假设小球表面是光滑的，在极短的碰撞时间内，显然 n 、 τ 方向均满足动量守恒，因此

切向分量（不存在碰撞冲量） $v'_{1\tau} = v_{1\tau}$ ， $v'_{2\tau} = v_{2\tau}$ ；

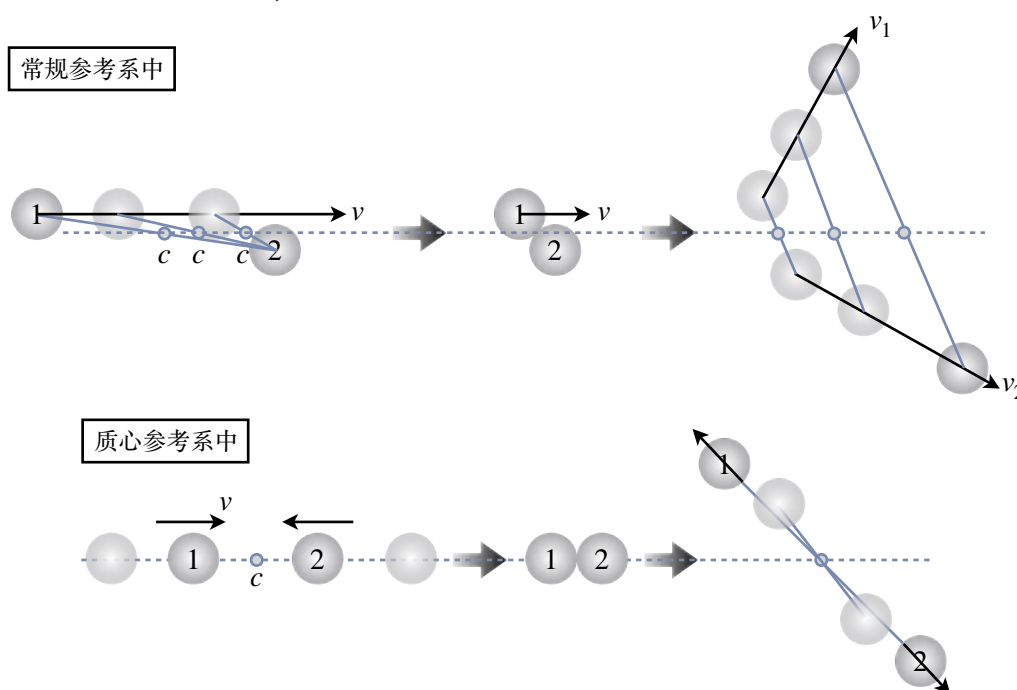
法向分量（等效为对心碰撞） $m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n} = m_1 v'_{1n} + m_2 v'_{2n}$ ，若为弹性碰撞，则补充

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1n}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2n}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1n}'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2n}'^2$$

质心系下的非对心碰撞

非对心碰撞的轨迹通常是不对称的两条折线，列写 n 、 τ 两个方向的方程还是较为烦琐的。我们不妨转入质心系进行观察。由于在质心系中系统总动量恒为零（ $p_{1c} + p_{2c} = 0$ ），这意味着无论碰撞前还是碰撞后，两个小球的动量永远等大反向。

换句话说，在质心系看来，任何斜碰都表现为两球沿着某一直线相向而行，碰撞后，又沿着另一条直线背向分离。碰撞的唯一宏观效果，就是将两球的运动轴线突然旋转了一个角度。



下面我们来讨论从弹性碰撞的情景。我们统一规定： $\vec{v}_i$ ， $\vec{v}_i'$ 分别为小球 i 在地面系碰撞前后速度， $\vec{v}_c$ 为质心速度， $\vec{v}_{ic}$ ， $\vec{v}_{ic}'$ 分别为小球 i 在质心系下碰撞前后速度。

弹性碰撞 碰撞前后，显然两球在质心系中的速率均不发生改变 ($|\vec{v}_{1c}| = |\vec{v}'_{1c}| = |\vec{v}_{2c}| = |\vec{v}'_{2c}|$)。因此，回到地面参考系，任意小球的最终速度 v' 仅仅是两个矢量的简单叠加：

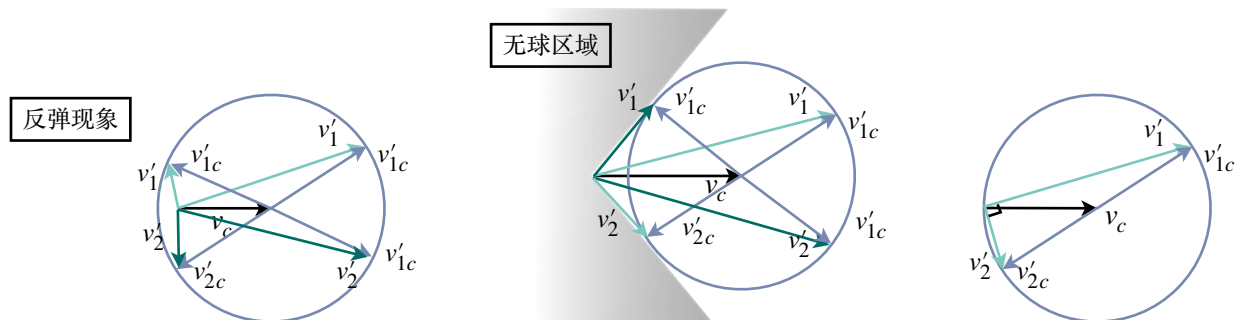
$$\vec{v}' = \vec{v}_c + \vec{v}'_{ic}$$

即地面碰后速度 = 质心平动速度 + 质心系碰后速度。

因为 $|\vec{v}'_{ic}|$ 的大小恒定，只是方向旋转了，所以在矢量图中， $\vec{v}'_{ic}$ 的终点必定在一个圆上运动。

假设入射球质量为 m_1 (初速度 v_1)，靶球质量为 m_2 (静止)。因此， $v_c = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1$ 。入射球在质心系中的速度大小为 $v_{1c} = v_1 - v_c = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_1$ 。依据这两个矢量的长短关系 (即质量比)，碰撞的几何图像会呈现三种截然不同的情况：

Case1 ($m_1 < m_2$) 此时 $v_c < v_{1c}$ 。在矢量图中，平移矢量比旋转矢量短，起点在散射圆的内部。这意味着入射球可以向任意方向散射，甚至发生大角度的反弹 (后向散射)，如左图所示。



Case2 ($m_1 > m_2$) 此时 $v_c > v_{1c}$ 。平移矢量比旋转矢量长，起点在散射圆的外部。这意味着入射球具有巨大的前向惯性，它不可能被反弹回后方，存在一个**最大偏转角** (轨迹只能局限在一个锥角内)，如中间图所示。

Case3 ($m_1 = m_2$) (相对常见) 此时 $v_c = v_{1c}$ 。此时 v'_1, v'_2 的起点均在圆上，因此我们可以得到一个特殊结论：**碰撞后两球速度的夹角必定是 $\frac{\pi}{2}$** ，如右图所示。

注意 对于非弹性碰撞，由于碰撞后 n 轴方向速度发生衰变，由恢复系数 e 决定，此时 v'_{1c} 的轨迹较为复杂，采用质心系分析并不方便。因此，对于此类问题，我们还是通过动量守恒与能量守恒直接计算即可。

五. 质心运动定理

前面我们已经知道，系统动量守恒时，可以对速度方程积分得到位移关系，事实上这就是质心思想的体现；在碰撞问题中，也可以通过质心系简化相对运动。下面我们引入质心，将这些方法统一起来。

注意 质心可以为我们从更高维的视角认识系统动量以及碰撞，但务必先掌握常规的处理方法：能量 + 动量，利用碰撞结论，识别类碰撞情况等再进行学习，不可本末倒置。基础薄弱的读者请跳过本小节。

系统的运动可以分解为质心的整体平动与各质点相对质心的内部运动。其中，各质点相对质心的运动较为简单，大致为相对质心平动或转动。下面我们主要分析在质心视角下的整体平动。

1. 质心 (Center of mass)

引入质心的目的 用某一个质点的运动状态来表征质点系的运动状态，使物体运动状态的描述变得更简洁。

质心位置矢量 $r_c = \frac{m_1}{M} r_1 + \frac{m_2}{M} r_2 + \dots + \frac{m_n}{M} r_n$ ，其中 r 为位置矢量。下面给出推导过程。

常用一维形式 (各质点都在 x 轴上) $x_c = \frac{m_1}{M} x_1 + \frac{m_2}{M} x_2 + \dots + \frac{m_n}{M} x_n$

推导 (选读) 对于一个有 n 个质点构成的系统，该系统的总动量 p 为

$$p = m_1 v_1 + m_2 v_2 + \dots + m_n v_n = m_1 \frac{dr_1}{dt} + m_2 \frac{dr_2}{dt} + \dots + m_n \frac{dr_n}{dt}$$

即 $p = \frac{d}{dt}(m_1 r_1 + m_2 r_2 + \dots + m_n r_n)$;

答案 成一个半径匀速扩大的球面。对于烟花系统受到的合外力仅为重力 G ，根据质心运动定理

$$\text{系统质心的加速度 } a_c = g$$

这意味着，无论烟花内部的弹片如何互相挤压、飞散，它们共同构成的质心始终做自由落体运动。在质心参考系下，由于爆炸冲量的对称作用，弹片将沿各个方向以恒定的速率飞散，以相同的速度匀速远离质心。因此，在地面参考系看来，分散的弹片在空中会形成一个半径不断扩大的球面，而这个球面的几何中心也就是质心，正以加速度 g 自由下落。

3. 质心系为零动量参考系

质心系的定义 参考系的速度始终等于质心速度 $\vec{v}_c$ ，称为质心参考系，简称质心系。

质心系总动量的特殊性 质心系是零动量参考系。即 $\sum_i m_i \vec{v}'_i = 0$ （在质心系中）

证明 设第 i 个质点在地面系中的速度为 $\vec{v}_i$ ，在质心系中的速度为 $\vec{v}'_i$ ，则由相对运动关系有

$$\vec{v}'_i = \vec{v}_i - \vec{v}_c$$

于是，系统在质心系中的总动量为 $\vec{p}' = \sum_i m_i \vec{v}'_i = \sum_i m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_c)$ ，整理得

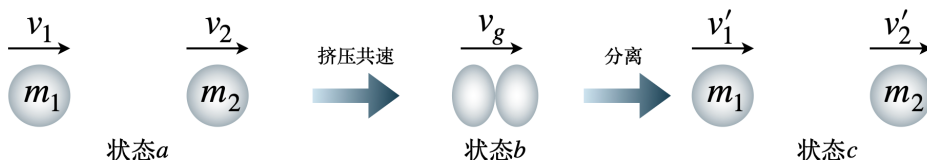
$$\vec{p}' = \sum_i m_i \vec{v}_i - \left(\sum_i m_i \right) \vec{v}_c$$

又因为 $\sum_i m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_c$ ， $\sum_i m_i = M$ ，所以 $\vec{p}' = M \vec{v}_c - M \vec{v}_c = 0$ ，即系统总动量恒为零： $\sum_i m_i \vec{v}'_i = 0$ 。

注意 这里的“总动量为零”并不是说系统中每个质点都静止，而是说各质点在质心系中的动量矢量和为零。换句话说，质心系并没有消除系统内部的相对运动，它只是扣除了系统整体的平动。

因此，质心系的意义不在于改变物理过程，而在于改变观察方式：我们可以用质心运动定理确定质心的运动，再在质心系中分析系统内部的相对运动。这样可以把复杂的多物体运动分解为两个更清晰的问题。

理解 例如前文中的这个过程，对于这个两体问题，我们计算验证可知 v_g 就是质心速度 v_c



因此在质心系中 $m_1(v_1 - v_g) + m_2(v_2 - v_g) = 0$ ，且 $m_1(v'_1 - v_g) + m_2(v'_2 - v_g) = 0$ ，我们简单化简即可得到

$$v_1 + v'_1 = v_2 + v'_2 = 2v_g$$

利用质心系我们可以严谨快速的得到这个结论。

公式小结

质心速度	质心系质点速度	零动量性质
$\vec{v}_c = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i}$	$\vec{v}'_i = \vec{v}_i - \vec{v}_c$	$\sum_i m_i \vec{v}'_i = 0$

4. 两体系统在质心系中的镜像运动

镜像性质 对于两体系统，零动量性质写成 $m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 = 0$ ，即 $m_1 \vec{v}'_1 = -m_2 \vec{v}'_2$ 这表明

在质心系中，两物体的动量始终等大反向，因此它们的运动具有严格的“镜像结构”。

质心系与相对运动的联系 $\vec{v}'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_{\text{rel}}$ ， $\vec{v}'_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_{\text{rel}}$ ，其中 $\vec{v}_{\text{rel}} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ 为二者相对速度。

证明 设两物体地面系中的速度分别为 $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ ，两物体在地面系中的相对速度为 $\vec{v}_{\text{rel}} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ 。由于更换参考系后相对速度不变，因此在质心系中 $\vec{v}'_1 - \vec{v}'_2 = \vec{v}_{\text{rel}}$ ，且二者满足镜像关系， $m_1 \vec{v}'_1 = -m_2 \vec{v}'_2$ ，化简容易得到

理解 系统总动能 E_k 被拆分为质心动能 $\frac{1}{2}M\vec{v}_c^2$ 和各质点相对质心的动能 $\frac{1}{2}\sum m_i\vec{v}_i'^2$ 两部分。

推导 为了更深刻地理解这样动能分解的合理性，我们进一步分析质心速度 v_c 的构成

$$v_c = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{M}$$

即各质点的速度看作一组按质量加权的数据，而数学期望 $E(X) = \sum p_i X_i$ 也是对 X_i 按概率加权的求和形式。对应过来即为

$$p_i \leftrightarrow \frac{m_i}{M}, \quad X_i \leftrightarrow \vec{v}_i$$

因此质心速度可记为 $E_m(\vec{v}) = \vec{v}_c$ ，进一步可类比得到 $D_m(\vec{v}) = E_m(|\vec{v} - \vec{v}_c|^2)$ 。

由 $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ 可得

$$E_m(v^2) = v_c^2 + D_m(\vec{v}) \Rightarrow \frac{1}{2}ME_m(v^2) = \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}MD_m(\vec{v})$$

而系统总动能正好为 $E_k = \sum \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}ME_m(v^2)$ ，且有 $\frac{1}{2}MD_m(\vec{v}) = \frac{1}{2}\sum m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_c)^2$ ，这正好为各质点相对质心动能，至此我们便利用 $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ 严谨的证明了柯尼希定理。

两体系统的简化形式 $E_k = \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}\mu v_{\text{rel}}^2$ ，其中 $M = m_1 + m_2$ ，定义 $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ 为两体系统的约化质量。

证明 $E_k = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$ 。将 $\vec{v}_1 = \vec{v}_c + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_{\text{rel}}$ ， $\vec{v}_2 = \vec{v}_c - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_{\text{rel}}$ ，代入 E_k ，得

$$E_k = \frac{1}{2}m_1 \left(\vec{v}_c + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_{\text{rel}} \right)^2 + \frac{1}{2}m_2 \left(\vec{v}_c - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_{\text{rel}} \right)^2$$

展开后，含有 $\vec{v}_c \cdot \vec{v}_{\text{rel}}$ 的交叉项相互抵消，最终得到： $E_k = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_c^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}v_{\text{rel}}^2$ 。结合定义化简为

$$E_k = \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}\mu v_{\text{rel}}^2$$

它表明：两体系统的总动能可以分解为两部分。

第一部分 $\frac{1}{2}Mv_c^2$ 表示系统整体随质心运动所具有的动能，称为质心平动动能；

第二部分 $\frac{1}{2}\mu v_{\text{rel}}^2$ 表示两物体相对运动所具有的动能，称为相对动能。

理解 $E_k = \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}\mu v_{\text{rel}}^2$ 是 $E_k = \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}\sum m_i v_i'^2$ 的简化，在两体问题中使用更为方便。

对能量转化的深入理解 若系统所受合外力为零，则质心速度保持不变，质心平动动能 $\frac{1}{2}Mv_c^2$ 不变；此时，

系统内部的能量转化只发生在相对动能 $\frac{1}{2}\mu v_{\text{rel}}^2$ 这一部分。

这正是许多类碰撞模型的共同本质。

(4) 弹性碰撞：碰撞前后机械能不损失，质心速度不变，因此相对动能不变：

$$\frac{1}{2}\mu v_{\text{rel}}'^2 = \frac{1}{2}\mu v_{\text{rel}}^2 \Rightarrow |v_{\text{rel}}'| = |v_{\text{rel}}|$$

因此在一维弹性碰撞中，相对速度大小不变方向反向： $v_{\text{rel}}' = -v_{\text{rel}}$ 。这是此结论最本质的来源。

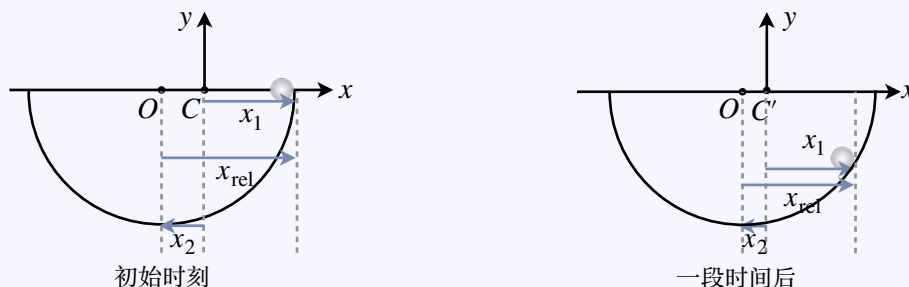
(5) 完全非弹性碰撞：对于完全非弹性碰撞，碰后两物体共速，因此 $v_{\text{rel}}' = 0$ ，相对动能全部消失。则损失的机械能为 $\Delta E = \frac{1}{2}\mu v_{\text{rel}}^2$ 。这样无需复杂计算，便自然的得到损失能量结论。

前面我们已经多次使用动量+能量处理两体相互作用问题。但现在我们知道了，这些方程背后隐藏着更清晰的结构：动量守恒决定质心平动，能量变化决定相对运动。

对于基础问题 直接列动量与能量方程即可；

对于多次碰撞、连续作用和类碰撞问题 引入质心系可使问题转化为：通过研究质心运动，间接确定物体实际运动。在这里我们只先进行预告，具体操作方法见下文。

上面的结论只是我们大致的感觉，这里我们不妨慢一点，搞清楚坐标之间的转换关系。我们只讨论最常见的情况即小球从顶端下落（更复杂的情况无非是初始位置不同）。如图建立坐标系，设 O 为凹槽圆心，到小球的初始距离为 R 。 C 为初始时刻质心位置。



我们可以看到， x_1 、 x_{rel} 分别为小球在以 C 、 O 为原点的坐标系中的横坐标。而在题目中，我们最喜欢的当然是以 O 为原点确定凹槽的轨迹，这样是最简单的，我们记 O 为原点坐标系下小球轨迹为 $f(x, y) = 0$ 。同时注意到切换坐标系对 y 方向是没有影响的，因此我们可以严谨的写出在 C 为原点时，小球坐标满足

$$f(x, y) = f\left(\frac{m_1 + m_2}{m_2} x_1, y\right) = 0$$

但在题目中，我们最终所求的轨迹方程一般以出初始时刻的 O 点为原点，所以我们还需要在平移一步，即将固定点 C 平移到最初的 O 点，平移长度即初始的 $\overline{OC} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} R$ 。因此平移后的坐标系满足

$$\begin{aligned} x' &= x_1 \pm \overline{OC} = x_1 \pm \frac{m_1}{m_1 + m_2} R \\ \Rightarrow f(x, y) &= f\left(\frac{m_1 + m_2}{m_2} x_1, y\right) = f\left[\frac{m_1 + m_2}{m_2} \left(x_1 \pm \frac{m_1}{m_1 + m_2} R\right), y\right] = f\left(\frac{m_1 + m_2}{m_2} x_1 \pm \frac{m_1}{m_2} R, y\right) = 0 \end{aligned}$$

理解 正负号的确定要看我们要如何平移。若需把 C 向左平移，即坐标系左移，相当于图像右移，根据左加右减，我们选取负号，反之选正号。

思路总结

STEP 1 先写出小球相对于槽、半球或杆的相对轨迹方程 $f(x, y) = 0$ ；

STEP 2 写出坐标缩放关系。 $x_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} x$ ；

STEP 3 代入相对轨迹方程，得到对地轨迹 $f\left(\frac{m_1 + m_2}{m_2} x_1, y\right) = 0$ （以 C 为原点）；

STEP 4 根据题目需求进行平移，得到最终轨迹 $f\left(\frac{m_1 + m_2}{m_2} x_1 - \frac{m_1}{m_2} R, y\right) = 0$ （以 O 为原点）。

轨迹方程中的速度问题

在轨迹方程问题中，求出小球相对地面的轨迹之后，题目常进一步要求小球或凹槽在某一位置的速度大小。此时不能只依靠轨迹方程，还需要结合速度约束和能量关系。这类速度问题的核心仍然是区分两种速度：

小球相对于地面的速度 & 小球相对于槽、半球或杆的速度

处理此类问题，一般采用如下步骤。

STEP 1 设出各物体对地速度

设某时刻小球相对于地面的速度分量为 v_x, v_y 。槽、半球或杆等相对于地面的水平速度大小为 v_M 。

STEP 2 由水平方向动量守恒建立速度关系 $m v_x = M v_M$

STEP 3 由相对速度沿轨道切线建立方向关系。

小球相对于槽的速度等于小球对地速度减去槽对地速度。即在槽坐标系下

$$\vec{v}'_x = \vec{v}_x - \vec{v}_M$$

但槽的速度与小球水平速度方向相反，则小球相对于槽的水平速度大小为

$$v'_x = v_x + v_M$$

小球相对于槽的竖直速度大小为 v_y ，且相对速度方向沿轨道切线。设轨道切线与水平夹角为 θ ，则

$$\tan \theta = \frac{v'_y}{v'_x} = \frac{v_y}{v_x + v_M} \Rightarrow v_y = (v_x + v_M) \tan \theta$$

注意 这里的 θ 是相对轨迹上该点切线与水平方向的夹角，而不是小球对地速度与水平方向的夹角。

STEP 4 由机械能守恒求速度大小。

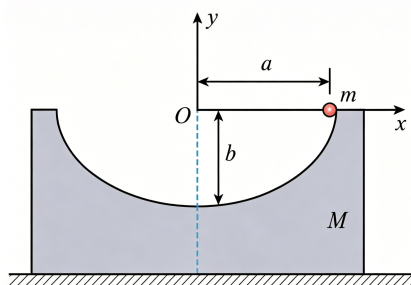
若系统机械能守恒，则有 $mgh = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + \frac{1}{2}Mv_M^2$

将 $v_M = \frac{m}{M}v_x$ 、 $v_y = (v_x + v_M)\tan \theta$ 代入，即可求出 v_x 、 v_y 、 v_M ，进而得到小球对地速度大小

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

理解 归根结底，我们只需要知道 v_x 与 v_y 的关系即可，因此若可较为容易通过实际轨迹确定合速度关系时，没必要硬通过 Step3 去求二者关系。

EXAMPLE 1 如图，质量为 M 的匀质凹槽放在光滑水平地面上，凹槽内有一个半椭圆形的光滑轨道，椭圆的半长轴和半短轴分别为 a 和 b ，长轴水平，短轴竖直。质量为 m 的小球，初始时刻从椭圆轨道长轴的右端点由静止开始下滑。以初始时刻椭圆中心的位置为坐标原点，在竖直平面内建立固定于地面的直角坐标系 xOy ，椭圆长轴位于 x 轴上。整个过程凹槽不翻转。



- (1) 小球第一次运动到轨道最低点时，求凹槽的速度大小以及凹槽相对于初始时刻运动的距离；
- (2) 在平面直角坐标系 xOy 中，求出小球运动的轨迹方程；
- (3) 若 $\frac{M}{m} = \frac{b}{a-b}$ ，求小球下降 $h = \frac{b}{2}$ 时，小球相对于地面的速度大小（结果用 a 、 b 及 g 表示）。

解析

- (1) 水平方向动量守恒 $mv_1 = Mv_2 \Rightarrow mx_1 = Mx_2$ ，其中 $x_1 + x_2 = a$ ，解得 $x_2 = \frac{m}{m+M}a$ 。

由能量守恒： $mgb = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2$ ，解得 $v_2 = \sqrt{\frac{2m^2gb}{M+mM}}$ （下文的爆炸反冲结论可快速计算）

- (2) **STEP 1** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ；**STEP 2、3** $\frac{(\frac{M+m}{M}x')^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，**STEP 4** $\frac{(\frac{M+m}{M}x' - \frac{m}{M}a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

答案是十分易得的，下面我们书写一下考试步骤（如果用质心能书写明白也可直接展开上面的四步）

STEP 1 对应部分 由于小球始终沿凹槽内的椭圆轨道运动，设相对凹槽坐标为 (x, y) 则轨迹满足

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

剩余步骤对应部分 设小球相对地面坐标为 (x', y) 。由 (1) 可得 $mx' + Mx_2 = m(a - x_1) + Mx_2 = ma$ （本质就是质心位置不变），因此

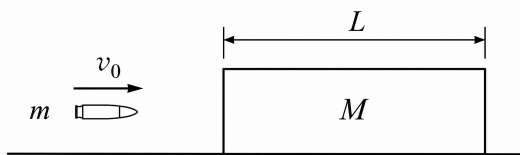
$$x_2 = \frac{m(a - x')}{M}$$

小球相对于凹槽中心的水平坐标为 $x = x' - x_2 = x' - \frac{m(a - x')}{M} = \frac{(M+m)x' - ma}{M}$ ，（连带了缩放加平移），

将其带入 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，即可得到小球相对于地面的轨迹方程

5. 子弹打木块模型

典例分析 如图，在光滑水平面上静止放置一质量为 M 、长为 L 的木块。质量为 m 的子弹以水平初速度 v_0 射入木块。子弹在木块内运动过程中受到的阻力大小恒定，且阻力大小与子弹初速度大小成正比，即 $f = kv$ 。（ k 为已知常数）。设子弹最终速度为 v_1 ，木块最终速度为 v_2



- (1) 若子弹穿出木块，列写动量与能量方程；
- (2) 若子弹未穿出木块，求子弹射入木块的深度 d ；
- (3) 若子弹未穿出木块，求 v_2 的最大值，并说明取等条件；
- (4) 求木块获得最大速度时 v_0 的表达式（用 k 、 M 、 m 、 L 表示）；

分析 (1) 能量方程： $fL = kv_0L$ 、 $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2 + fL$

动量方程： $mv_0 = mv_1 + Mv_2$

- (2) 未穿出时，此过程等效为完全非弹性碰撞，可得

$$kv_0d = \frac{mM}{2(M+m)}v_0^2 \Rightarrow d = \frac{mMv_0}{2k(M+m)}$$

- (3) (4) 未穿出时，木块最终速度就是共同速度： $v_2 = \frac{m}{m+M}v_0$

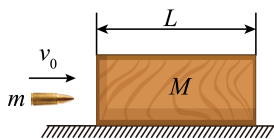
未穿出的条件为 $d \leq L$ ，可得 $v_0 \leq \frac{2kL(M+m)}{mM}$ ，进一步可得

$$v_2 \leq \frac{m}{M+m} \cdot \frac{2kL(M+m)}{mM} \Rightarrow v_{2\max} = \frac{2kL}{M}$$

取等条件为子弹刚好不穿出木块，即

$$d = L, v_0 = \frac{2kL(M+m)}{mM}$$

EXAMPLE 1 (多选) 如图所示，在光滑水平面上静止放置一质量为 M 、长为 L 的木块，质量为 m 的子弹水平射入木块。设子弹在木块内运动过程中受到的阻力不变，其大小 f 与射入初速度大小 v_0 成正比，即 $f = kv_0$ （ k 为已知常数）。改变子弹的初速度大小 v_0 ，若木块获得的速度最大，则



- A. 子弹的初速度大小为 $\frac{2kL(m+M)}{mM}$
- B. 子弹在木块中运动的时间为 $\frac{2mM}{k(m+M)}$
- C. 木块和子弹损失的总动能为 $\frac{k^2L^2(m+M)}{mM}$
- D. 木块在加速过程中运动的距离为 $\frac{mL}{m+M}$

解析

对于A，由前文分析可知正确；对于B，子弹加速度为 $a = \frac{f}{m} = \frac{kv_0}{m}$ ，末速度与恰好共速时相等，即 $v_2 = \frac{mv_0}{m+M}$ ，因此时间 $t = \frac{v_0 - v_2}{a} = \frac{mM}{k(m+M)}$ ，B错误；对于C，损失动能可用完全非弹性碰撞结论计算： $\Delta E = \frac{1}{2} \frac{mM}{m+M} v_0^2 = \frac{2k^2L^2(m+M)}{mM}$ ，C错误；对于D，由人船模型可知正确。综上，选AD。

(1) 由机械能守恒得 $\frac{1}{2}mv^2 = mgL \Rightarrow v = \sqrt{2gL}$;

(2) 设小球离杆时杆与竖直向上的夹角为 φ ，对径向受力分析得 $\frac{mv^2}{L} = mg \cos \varphi$ ；

由能量守恒得 $\frac{1}{2}mv^2 = mgL(1 - \cos \varphi)$ ，联立解得 $\cos \varphi = \frac{2}{3}$ ；因此离杆速度 $v_0 = \sqrt{\frac{2gL}{3}}$ ，离杆点高度为 $h = L \cos \varphi = \frac{2L}{3}$ 。

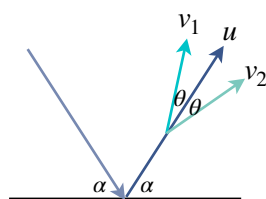
水平方向： $v_{0x} = v_0 \cos \varphi = \sqrt{\frac{2gL}{3}} \cdot \frac{2}{3}$ ，速度保持不变；

竖直方向： $v_{0y} = -v_0 \sin \varphi = -\sqrt{\frac{2gL}{3}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}$ ， $v_y^2 = v_{0y}^2 + 2gh$ 。联立解得 $\tan \alpha = \frac{|v_y|}{v_x} = \sqrt{\frac{46}{8}} = \frac{\sqrt{23}}{2}$ 。

(3) i)

落地后无损反弹，反弹后的速度大小仍为 $u = \sqrt{2gL}$ ，方向与水平夹角为 α 。设分裂后两块质量分别为

$m_1 = \frac{k}{k+1}m$ ， $m_2 = \frac{1}{k+1}m$ ，两块速度分别为 v_1, v_2



垂直于反弹后速度方向动量守恒： $m_1 v_1 \sin \theta = m_2 v_2 \sin \theta$

沿反弹后速度方向动量守恒： $m_1 v_1 \cos \theta + m_2 v_2 \cos \theta = mu$ 。联立解得：

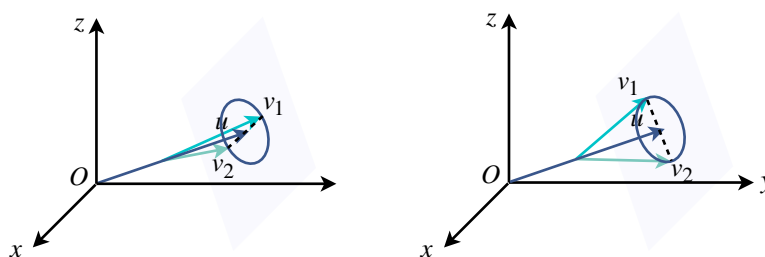
$$v_1 = \frac{k+1}{2k \cos \theta} u, \quad v_2 = \frac{k+1}{2 \cos \theta} u$$

分裂后动能为 $E'_k = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$ ，可得释放能量 $E = E'_k - E_k$ ，化简得

$$E = mgL \left[\frac{(k+1)^2}{4k \cos^2 \theta} - 1 \right].$$

ii) 由 (i) 可得 $E = mgL \left[\frac{k+2+\frac{1}{k}}{4 \cos^2 \theta} - 1 \right]$ ，可知 $k=1$ 时 E 取最小值 $E_{\min} = mgL \tan^2 \theta$

此时 $m_1 = m_2$ 相等，故分离后关于速度 u 完全对称，依题意得，二者竖直速度相等。如图



二者速度可绕 u 轴偏转，且末端轨迹均在垂直 u 的平面上。因此，若在竖直方向速度相等，只有右图情景满足题意。因此两块速度的

水平横向分量大小分别为 $v \sin \theta = \frac{u \sin \theta}{\cos \theta} = u \tan \theta$ ，方向相反，故相对水平速度为 $2u \tan \theta$

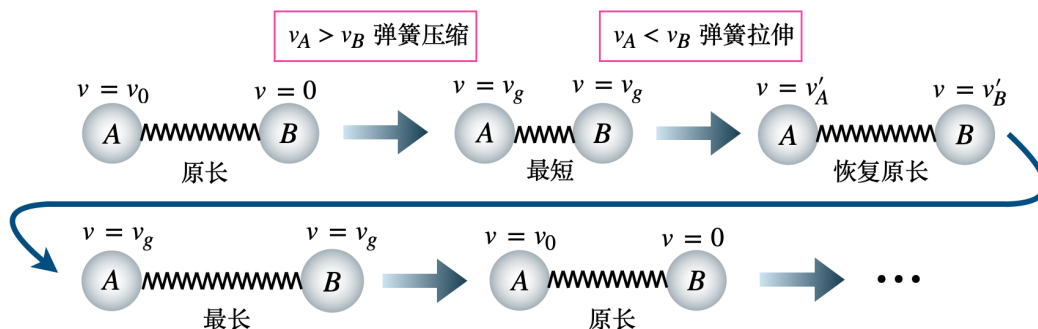
竖直方向速度：可知与 u 在竖直方向的速度相同， $v_y = u \sin \theta$ ；

故落地时间 $t = \frac{2v_y}{g}$ ，可得水平距离

$$d = 2u \tan \theta \cdot t = \frac{8\sqrt{69}}{9} L \tan \theta$$

6. 弹簧振子模型

模型概述 在光滑的水平面上，两小球 A、B 用一轻质弹簧（原长状态）连接，小球 A 有初速度 v_0 。



运动状态分析

第一阶段 小球 A 速度 v_A 大于小球 B 速度 v_B ，小球挤压弹簧向前运动，直到压缩到弹簧最短两小球达到共同速度 v_g 。

第一阶段分析 该阶段动量守恒，动能不守恒， $E_k \rightarrow E_p$ （弹簧弹性势能），相当于两球发生了一次完全非弹性碰撞，利用完全非弹性碰撞结论得

$$v_g = \frac{m_A v_0}{m_A + m_B}, \quad E_p = \frac{1}{2} \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} v_0^2$$

第二阶段 弹簧被挤压到最短后，对小球 A 施加阻力，为小球 B 提供动力；后续 $v_A < v_B$ ，弹簧逐渐伸长恢复至原长。

一二阶段结合分析 两阶段结合来看：动量守恒，动能守恒，等价于一次弹性碰撞，由碰撞结论得

$$v'_A = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_0, \quad v'_B = \frac{2m_A}{m_A + m_B} v_0$$

第三阶段 $v_A < v_B$ ，弹簧继续伸长向前运动，知道弹簧长度达到最值，两球再次达到共同速度 v_g 。

第三阶段分析 该阶段动量守恒，动能不守恒， $E_k \rightarrow E_p$ （弹簧弹性势能），相当于两球再发生了一次完全非弹性碰撞，利用完全非弹性碰撞结论得

$$v_g = \frac{m_A v'_A + m_B v'_B}{m_A + m_B} = \frac{m_A v_0}{m_A + m_B}$$

$$E_p = \frac{1}{2} \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} (v'_A - v'_B)^2 = \frac{1}{2} \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} v_0^2 = \frac{1}{2} \mu v_0^2 \quad (\text{即资用能全部转化为弹性势能}), \quad \text{我们顺便求一下最大形}$$

$$\text{变量: } \frac{1}{2} k x_{\max}^2 = \frac{1}{2} \mu v_0^2 \Rightarrow x_{\max} = v_0 \sqrt{\frac{\mu}{k}}$$

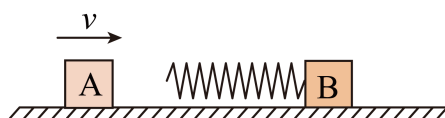
第四阶段 弹簧被拉伸到最长后，对小球 A 提供动力，为小球 B 施加阻力；后续 $v_A > v_B$ ，弹簧逐渐缩短恢复至原长。

三四阶段结合分析 两阶段结合来看：动量守恒，动能守恒，相当于两球再次发生了弹性碰撞，利用弹性碰撞结论得

$$v''_A = 2v_g - v'_A = v_0, \quad v''_B = 2v_g - v'_B = 0$$

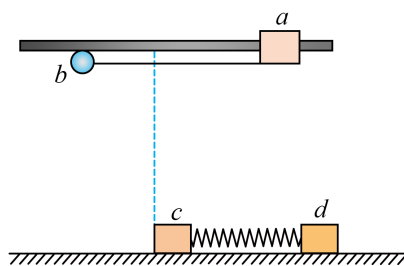
系统状态恢复至初始阶段，后续进行反复运动。

EXAMPLE 1 如图所示，光滑水平面上质量为 $2M$ 的物体 A 以速度 v 向右匀速滑动，质量为 M 的 B 物体左端与轻质弹簧连接并静止在光滑水平面上，在物体 A 与弹簧接触后，以下判断正确的是



A. 在物体 A 与弹簧接触过程中，弹簧对 A 的弹力冲量大小为 $\frac{4}{3} Mv$

低点时，恰好与物块 c 发生弹性碰撞（碰撞时间极短），碰后运动时间 t 时，物块 d 的加速度大小为 a_0 。不计空气阻力，小球和物块均可视为质点，重力加速度为 g 。求：



- (1) 小球 b 开始释放时，小球 b 到物块 c 的水平距离；
- (2) 小球 b 与物块 c 碰撞后，小球 b 上升的最大高度 h ；
- (3) 碰撞后时间 t 内，物块 c 运动的位移大小 x 。

解析

- (1) 根据人船模型可知：距离 $d = \frac{m}{m+2m}L = \frac{1}{3}L$ ；

- (2) 根据爆炸模型可知，重力势能按质量反比分配：

$$\frac{2m}{2m+m}2mgL = \frac{1}{2}mv_a^2, \quad \frac{m}{2m+m}2mgL = \frac{1}{2}2mv_b^2$$

$$\Rightarrow v_a = 2\sqrt{\frac{2gL}{3}}, \quad v_b = \sqrt{\frac{2gL}{3}}$$

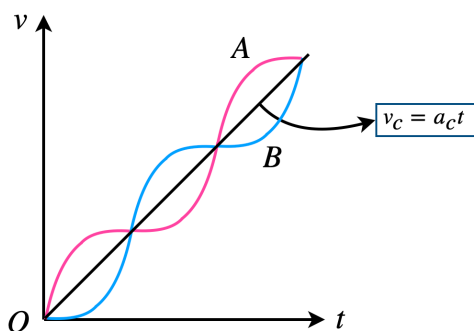
二者质量相等，弹碰交换速度，因此 $v_b' = 0$ ， b 上升到最大高度的过程中相当于发生完全非弹

因此， $2mgh = \frac{1}{2} \frac{2m^2}{2m+m} v_a^2$ ，解得 $h = \frac{4}{9}L$ ；

- (3) 由于位移与加速度的正弦部分相位始终相同，只是振幅大小不同，因此位移大小为：

$$x = v_c (\text{质心速度}) t \pm \frac{a_0}{\omega^2}, \quad \text{其中 } \omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \sqrt{\frac{3k}{2m}}, \quad v_c = \frac{2mv_b}{2m+m}. \quad \text{解得 } x = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2gL}{3}}t \pm \frac{ma_0}{3k}.$$

Case2 有外力作用 约定初始条件：设初始弹簧处于原长状态，小球 A 、 B 静止。故质心做初速度为 0、加速度 $a_c = \frac{F}{m_A + m_B}$ 的匀加速运动，两小球相对质心做简谐运动，先定性画出 $v-t$ 图像，图示如下：



思路 这个时候如何定量分析改过程下 A 、 B 的运动情况呢？当然我们还是遵循质心+质心系的原则进行分析，其中质心的运动的我们已经确定过了，即 $v_c = a_c t = \frac{F}{m_A + m_B}t$ ，因此对于质心系下的运动情况我们只需确定振子的振幅 A 和周期 T 即可。

STEP 1 确定振动周期 T

由于恒力不会改变相对振动的角频率，只会改变弹簧的平衡位置。因此质心系中相对振动的角频率仍为

$$\omega = \sqrt{\frac{k(m_A + m_B)}{m_A m_B}} \quad (\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}), \quad \text{因此 } T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

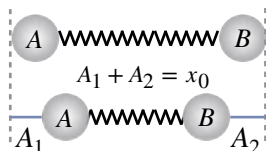
STEP 2 确定振动振幅 A

在前文中, 我们分析过质心系中二者受到恒力 $F' = \frac{m_B}{m_A + m_B} F$ 。由于 A、B 受到这一对大小相等、方向相反的恒力, 因此弹簧的平衡长度不再是原长, 而是发生偏移。

设弹簧劲度系数为 k , 平衡时弹簧形变量为 x_0 。平衡时弹力需要平衡这对等效恒力, 因此

$$k x_0 = \frac{m_B}{m_A + m_B} F \Rightarrow x_0 = \frac{m_B F}{k(m_A + m_B)}$$

这个 x_0 表示: 在质心系下, 弹簧的振动平衡时弹簧形变量为 x_0 。同时可以推出 A、B 此时都在平衡位置。由于二者初速度为 0, 因此各自的位移大小分别为振幅 A_1 、 A_2

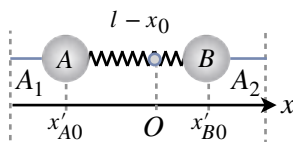


根据零动量性质, A_1 、 A_2 仍满足质量反比分配, 因此

$$A_1 = \frac{m_B^2 F}{k(m_A + m_B)^2}, \quad A_2 = \frac{m_A m_B F}{k(m_A + m_B)^2}$$

STEP 3 确定平衡位置坐标

质心系中以质心为原点, 图示如下



设平衡位置分别为 x'_{A0} 、 x'_{B0} , 则有

$$m_A x'_{A0} + m_B x'_{B0} = 0 \text{ 且 } x'_{B0} - x'_{A0} = l - x_0$$

解得

$$x'_{A0} = -\frac{m_B}{m_A + m_B}(l - x_0), \quad x'_{B0} = \frac{m_A}{m_A + m_B}(l - x_0)$$

故在质心系中, 两球从原长位置开始围绕各自的平衡位置做简谐运动。可知坐标为

$$x'_A = -\frac{m_B}{m_A + m_B}(l - x_0) - A_1 \cos \omega t, \quad x'_B = \frac{m_A}{m_A + m_B}(l - x_0) + A_2 \cos \omega t$$

$x-t$: 设地面系中初始时 A 位于原点, 即 $x_A(0) = 0$, $x_B(0) = l$, $x_c(0) = \frac{m_B l}{m_A + m_B}$, 故 $x_c = x_c(0) + \frac{1}{2} a_c t^2$

地面系坐标满足 $x_A = x_c + x'_A$, $x_B = x_c + x'_B$, 代入并整理, 得到

$$x_A = \frac{F}{2(m_A + m_B)} t^2 + A_1(1 - \cos \omega t), \quad x_B = l + \frac{F}{2(m_A + m_B)} t^2 - A_2(1 - \cos \omega t)$$

$$v-t: v_A = \frac{dx_A}{dt} = A_1 \omega \sin \omega t + a_c t, \quad v_B = \frac{dx_B}{dt} = v_B'' + v_c = -A_2 \omega \sin \omega t + a_c t$$

$$a-t: a_A = \frac{dv_A}{dt} = A_1 \omega^2 \cos \omega t + a_c, \quad a_B = \frac{dv_B}{dt} = -A_2 \omega^2 \cos \omega t + a_c$$

理解 读者可只记忆 $a-t$, 剩余的积分即可简单推出。

性质小结

- (1) 每经过 $\frac{T}{2}$ 二者共速一次, 每经过 $\frac{T}{2}$ 二者加速度相等一次;
- (2) 质心系下 a'_A 、 a'_B 关于 x 轴对称, 振幅与质量成反比 我们可求出质心加速度, 在地面系下减去 a_c 即可得到质心系加速度。
- (3) 质心系下 a'_A 、 a'_B 在初始时刻达到最大值, 且随时间按余弦变化;
- (4) 无论受力情况如何, 质心系下 a'_A 、 a'_B 均满足振幅按质量成反比, 对称分布。

七. 柯尼希定理的应用与恢复系数

1. 柯尼希定理回顾

定理内容 质点系在某参考系的动能等于质心动能与各质点相对质心的动能之和。

公式表述 $E_k = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} \mu v_{\text{rel}}^2$, 其中 $M = m_1 + m_2$, $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, $v_{\text{rel}} = v_1 - v_2$.

Case1 系统不受外力

$$\text{此时 } a_c = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} M v_c^2 \text{ 不变} \Rightarrow \text{只有 } \frac{1}{2} \mu v_{\text{rel}}^2 \text{ 改变}$$

Case2 系统受外力

对 $E_1 = \frac{1}{2} M v_c^2$: $\Delta E_1 = F \cdot x_c$, 其中 x_c 为质心的位移;

对 $E_2 = \frac{1}{2} \mu v_{\text{rel}}^2$: $\Delta E_2 = F \cdot \Delta x_c$, 其中 Δx_c 为 F 作用点相对质心的位移;

思考 多质点系统如何求 x_c ?

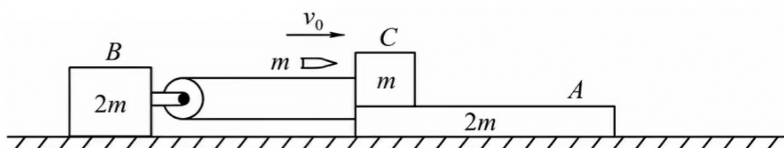
答案 对于质点较少情况, 我们可以单独求解质心坐标 r_{c1} 、 r_{c2} , 进而求得质心位移 $x_c = r_{c2} - r_{c1}$, 但质点较多时这种方法显然比较麻烦。记 x_i 为第 i 个质点的位移, 我们可以化简 x_c 的表达式

$$x_c = r_{c2} - r_{c1} = \frac{\sum (m_i r_{i1} - m_i r_{i2})}{M} = \frac{\sum m_i x_i}{M}$$

理解 可以看到, 各质点位移按质量加权的平均值就是质心位移。对于多个质点的质点系中, 往往单次只有一个或几个质点移动, 此时利用 $x_c = \frac{\sum m_i x_i}{M}$ 求解质心位移就很方便了。

我们来换种方法解决前文中的碰撞问题结尾的例5。

题目 如图所示, 光滑水平面上放置木板A, 木板A的上表面光滑, 其左端放置一可视为质点的物块C, 木板A左侧一定距离处放置带有光滑轻质定滑轮的物块B。一根轻质弹性绳绕过定滑轮, 两端分别与木板A和物块C相连, 且滑轮两侧的弹性绳均保持水平, 初始时系统处于静止状态, 弹性绳处于原长。一质量为 m 的子弹以初速度 v_0 水平向右射入C并留在其中(作用时间极短)。已知木板A的质量为 $2m$, 物块B的质量为 $2m$, 物块C的质量为 m , 在研究过程中A、B未发生碰撞, 且C未从A上滑落, 弹性绳的形变始终在弹性限度内。求:



(3) 弹性绳伸长到最长时的弹性势能;

(4) 弹性绳刚好恢复原长时B的速度

解析

(3) 由前文分析可知, $v_C - v_A = \frac{1}{2} v_0$, 可知 AC 组成的系统的相对动能不变, 因此总动能中只有质心动能发生改变, 因此可以将 AC 视为整体与 B 作用。此时最大弹性势能即为完全非弹性碰撞损失能量, AC 质心速度为 $v_c = \frac{m v_0}{4m} = \frac{1}{4} v_0$ 。可得

$$E_p = \frac{1}{2} \frac{2m \cdot 4m}{2m + 4m} v_c^2 = \frac{1}{24} m v_0^2$$

(4) 刚好恢复原长时相当于完全一次弹性碰撞, 因此

$$v'_B = \frac{2 \cdot 4m}{2m + 4m} v_c = \frac{1}{3} v_0$$

EXAMPLE 1 如图, 一长为 L 的不可伸长的轻绳两端各连接一质量为 m 的小球, 初始时整个系统静置于光滑水平桌面上, 两小球间的距离等于绳长, 且绳长远大于小球半径。一大小的水平恒力 F 作用在轻绳的中

当 $k \geq e$ 时, $v_A \geq 0$, 且 $v_A < v_B$ 两者只会相撞一次, 符合题意;

当 $k < e$ 时, $v_A < 0$ 反向运动, 由于需满足 $x_B - x_A = \frac{h}{2}$, 故也不会发生两次相撞, 故 $e \in [\frac{\sqrt{6}-2}{2}, 1]$ 内都满足题意, 而还需满足 B 会停下来, 故 $\frac{v_B^2}{2g} \leq h$, 即 $v_B^2 \leq v_0^2$, 所以 $\frac{k(1+e)}{k+1} < 1$, 解得 $k \leq \frac{1}{e}$, 则

$$(e+1)(e^2-4e+1) \leq 0$$

又 $e \in [\frac{\sqrt{6}-2}{2}, 1]$ 。综上解得 $e \in [\frac{2-\sqrt{2}}{2}, 1]$, 记 $f(e) = \frac{2e^2+1}{2e^2+4e-1}$, 当 $e \in [\frac{2-\sqrt{2}}{2}, 1]$, 因为 $f'(e) < 0$, 所以 $k \in [f(1), f(\frac{2-\sqrt{2}}{2})]$, 故 $\frac{m_A}{m_B} \in [\frac{3}{5}, 2+\sqrt{2}]$ 。

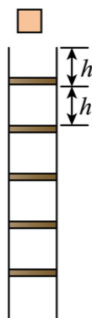
八. 多次碰撞问题

1. 碰撞递推法

面对此类问题, 我们常利用数学归纳法进行简化步骤, 核心原因: 随着物理过程重复, 物理量成一定的变化规律, 可求出通项公式。我们可把 **相邻两次碰撞之间的运动 + 下一次碰撞** 看成一个重复单元, 即

碰后速度 $v_k \rightarrow$ 下一次碰前速度 $u_{k+1} \rightarrow$ 下一次碰后速度 v_{k+1}

EXAMPLE 1 如图所示, 竖直放置的足够长直管中, 每隔距离 h 放置一质量为 m 的圆盘, 现将一质量也为 m 的木块从第一个圆盘上方 h 处由静止释放。已知每个圆盘与长直管间的滑动摩擦力均和圆盘自身重力大小相等, 所有碰撞均为完全非弹性碰撞, 且耐撞时间极短, 忽略圆盘厚度, 重力加速度大小为 g , 求:



- (1) 木块与第一个圆盘碰撞后瞬间的速度大小;
- (2) 第 100 次碰撞后瞬间木块的速度大小;
- (3) 从开始运动到第 100 次碰撞后瞬间, 木块与所碰圆盘组成的系统损失的机械能。

解析

- (1) 设木块与第一个圆盘碰前的速度 v_0 为, 根据动能定理有 $mgh = \frac{1}{2}mv_0^2$, 解得 $v_0 = \sqrt{2gh}$

由动量守恒得 $mv_0 = 2mv_1$, 解得 $v_1 = \frac{v_0}{2} = \frac{\sqrt{2gh}}{2}$

(2) 设第 n 次碰撞后, 木块与 n 圆盘组成的整体速度为 v_n 。从第 n 次碰撞后到第 $n+1$ 次碰撞前, 整体质量为 $(n+1)m$, 受到总重力 $(n+1)mg$, 受到圆盘摩擦力 nmg , 所以合外力为

$$(n+1)mg - nmg = mg \Rightarrow a_n = \frac{g}{n+1}$$

于是第 $n+1$ 次碰撞前速度 u_{n+1} 满足 $u_{n+1}^2 = v_n^2 + \frac{2gh}{n+1}$ 。

第 $n+1$ 次碰撞时, 又粘上一个静止圆盘, 由动量守恒: $(n+1)mu_{n+1} = (n+2)mv_{n+1}$

得到递推式 $v_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}u_{n+1} \Rightarrow v_{n+1}^2 = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 \left(v_n^2 + \frac{2gh}{n+1}\right)$, 结合 $v_1^2 = \frac{gh}{2}$ 可得 $v_n = \sqrt{\frac{ng}{n+1}}$

故第 100 次碰撞后速度大小为 $v_{100} = \frac{10\sqrt{101gh}}{101}$ 。

(3) 从开始运动到第100次碰撞后瞬间, 木块与所碰圆盘组成的系统损失的机械能等于系统减少的重力势能与增加的动能之差, 即 $\Delta E = (100mgh + 99mgh + 98mgh + \dots + mgh) - \frac{1}{2}101mv_{100}^2$, 解得 $\Delta E = 5000mgh$

EXAMPLE 2 如图所示, 左侧水平高台上放置一质量 $m_1 = 0.92\text{kg}$ 的木块, 一质量 $m_0 = 0.08\text{kg}$ 的子弹以 $v_0 = 400\text{m/s}$ 的速度射向木块并留在其中, 随后木块滑向右侧光滑水平面上足够长的长木板上, 长木板上表面粗糙且与高台齐平, 长木板右侧足够远处均匀排列 n 个质量为 $M = 3\text{kg}$ 的铁块, 已知长木板质量 $m = 1\text{kg}$, 所有碰撞均为弹性正碰, 重力加速度 $g = 10\text{m/s}^2$, 求:



- (1) 子弹打入木块过程中系统损失的机械能;
- (2) 木块最终速度大小。

解析

- (1) 设共速速度为 u , 动量守恒能量守恒得

$$m_0 v_0 = (m_1 + m_2)u, \Delta E = \frac{1}{2}m_0 v_0^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_0)u^2 = \frac{1}{2} \frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1} v_0^2$$

解得 $\Delta E = 5888\text{J}$, $u = 32\text{m/s}$

- (2) 记 $m_A = m_1 + m_0$, 设木块第一次与长木板共速时速度为 v_{g1} , 由动量守恒可得 $m_A u = (m_A + m)u_1$

解得 $u_1 = 16\text{m/s}$ 。

我们定义 u_k 为第 k 轮木板与铁块碰撞前, 木块和木板的共同速度, v_k 为木板碰后速度

第 k 轮木板与铁块的碰撞到第 $k+1$ 轮碰撞过程

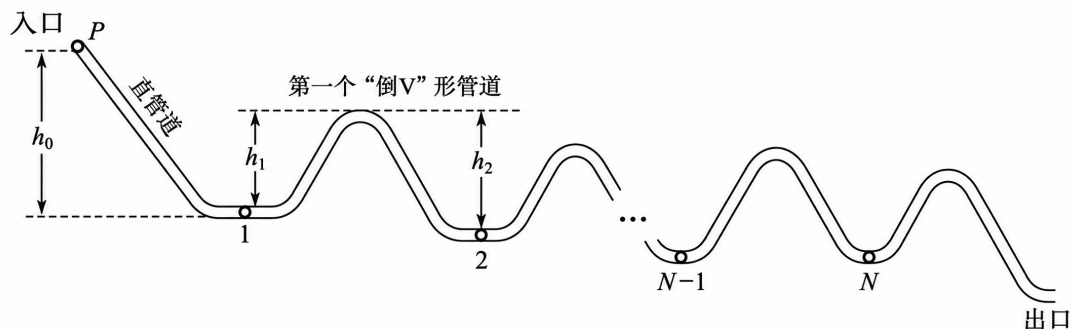
$$v_k = \frac{m-M}{m+M}u_k, m_A u_k + m v_k = (m_A + m)u_{k+1} \quad (\text{第 } k \text{ 次+共速})$$

$$v_{k+1} = \frac{m-M}{m+M}u_{k+1} \quad (\text{第 } k+1 \text{ 次})$$

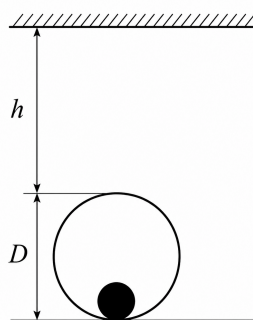
联立可得 $u_k = 4u_{k+1}$, 结合 $u_1 = 16\text{m/s} \Rightarrow u_n = u_1 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-3}\text{m/s}$

由于共有 n 个铁块, 因此最终木块速度为 $u_{n+1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}\text{m/s}$ 。

EXAMPLE 3 某同学设计的弹球游戏装置示意图如图所示, 装置由一段倾斜直管道和 N 个相同的不对称“倒V”形管道平滑连接而成, 管道透明且光滑, 固定在竖直平面内。入口端与第一个“倒V”形管道左端高度差为 h_0 , 每个“倒V”形管道最高点与其左、右两端的高度差分别为 h_1 和 h_2 ($h_1 < h_2$)。每个“倒V”形管道的左端均静置1个质量为 m 的弹球, 自上而下依次编号为 $1, 2, 3, \dots, N$ 。开始游戏时, 在入口端由静止释放一质量为 $M = 4m$ 的弹球 P 。所有弹球的直径均略小于管道内径, 不计管道内径、弹球大小及滚动、弹球与管道相互作用的能量损失和空气阻力, 所有弹球之间的碰撞均视为对心弹性碰撞, 重力加速度为 g 。



- (1) 求弹球 P 与 1 号弹球第一次碰撞后瞬间, 弹球 P 和 1 号弹球各自的速度大小;



- (1) 求小球直径；
- (2) 求球壳与小球发生碰撞后第一次与第二次碰撞的时间间隔；
- (3) 若球壳与小球发生第8次碰撞前的速度为6m/s，求球壳落地时的速度大小。

解析

(1) 球壳碰天花板前速度 $v = \sqrt{v_0^2 - 2gh} = 1 \text{ m/s}$ ，故碰后二者相对速度 $v_{\text{rel}} = 2 \text{ m/s}$ 。因此

$$l - d = v_{\text{rel}} \Delta t \Rightarrow d = 0.05 \text{ m}$$

(2) 弹性碰撞相对速度大小不变，只是方向相反，因此第一次碰撞后，小球相对球壳向下运动，要从球壳内顶端到内底端，相对位移仍为 $l - d = 0.2 \text{ m}$ ，所以第一次与第二次碰撞的时间间隔为

$$\Delta t' = \frac{0.2}{2} = 0.1 \text{ s}$$

(3) 设球壳质量为 M ，小球质量为 m 。质心速度 $v_c = \frac{MV + mv}{M + m}$ ，质心加速度 $a_c = g$ 。从球壳反弹开始，以下为正方向。则有 $v_{c0} = \frac{M - m}{m + M}$ 。

由(2)分析可知，每次碰撞时间间隔为0.1s，可得第 n 次碰撞前，时刻为 $t_n = 0.1n$ 。故 n 次碰撞前质心速度和相对速度 ($v_{\text{rel}} = V - v$) 分别为

$$v_{cn} = v_{c0} + gt_n = \frac{M - m}{m + M} + n, \quad v_{\text{rel},n} = 2(-1)^{n+1}$$

可得球壳速度等于质心速度 + 小球质量占比乘相对速度：

$$V_n = v_{cn} + \frac{m}{m + M} v_{\text{rel},n}$$

可得 $V_8 = \frac{M - m}{m + M} + 8 - \frac{2m}{m + M} = 6$ ，解得 $m = 3M$ ， $v_{c0} = -\frac{1}{2} \text{ m/s}$

可得初始质心位置 $x_{c0} = \frac{D}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{D - d}{2} = 0.2 \text{ m}$ 。可得 n 次碰撞时

$$x_{cn} = x_{c0} + v_{c0}(0.1n) + \frac{1}{2} a_c n (0.1)^2 = 0.2 - 0.05n + 0.05n^2$$

注意到，偶数次碰撞前，球壳下方坐标为 $x = x_{cn} + D - 0.2 = x_{cn} + 0.05$ ；

奇数次碰撞前，球壳下方坐标为 $x = x_{cn} + 0.2$ ；

$n = 10$ 时 $x = 4.75 \text{ m} < 6.25 \text{ m}$ 、 $n = 11$ 时 $x = 5.9 \text{ m} < 6.25 \text{ m}$ 、 $n = 12$ 时 $x > 6.25 \text{ m}$ ；

可知，落地时已经发生第十一次碰撞，还没发生第十二次碰撞。故碰前速度 $V_{11} = 12 \text{ m/s}$ ，碰后

$$V'_{11} = V_{11} - 2(V_{11} - \frac{MV_{11} + m(V_{11} - 2)}{M + m}) = 9 \text{ m/s}$$

可得落地速度 v 满足 $\frac{v^2 - V_{11}'^2}{2g} = 6.25 - 5.9 \Rightarrow v = 2\sqrt{22} \text{ m/s}$ 。

EXAMPLE 5 如图所示，一足够长的平直木板放置在水平地面上，木板上有 $5n$ (n 是大于 1 的正整数) 个质量均为 m 的相同小滑块，从左向右依次编号为 1、2、...、 $5n$ ，木板的质量为 nm ，相邻滑块间的距离均为 L ，木板与地面之间的动摩擦因数为 μ ，滑块与木板间的动摩擦因数为 2μ ，初始时木板和所有滑块均处于静止状态，