

CHAPTER 1	1
矢量积分	1
一. 从一维标量到三维矢量	1
二. 两大典型积分	1
1. 线积分 (Line Integral)	1
2. 面积分 (Surface Integral)	2
CHAPTER 2	4
静电场	4
一. 静电场基础知识	4
1. 电荷及相关知识	4
2. 元电荷	5
二. 电荷间的相互作用	5
1. 点电荷 (Point Charge)	5
2. 库仑定律	5
3. 含库仑力的平衡问题	6
三. 电场和电场强度	10
1. 电场和电场强度概念	10
2. 常见的电场求解方法	12
四. 静电场中的功能关系	20
1. 静电力做功	20
2. 电势能和电势	21
3. 等势面 (equipotential surface)	25
4. 常见电势分布	27
五. 带电粒子在电场中的运动	33
1. 带电粒子的加速	33
2. 带电粒子的偏转	35
3. 加速场、偏转场以及放大效应	36
4. 类抛体问题	38
5. 交变电场中的带电粒子运动	40
六. 含电场的动力学综合问题	44
七. 电容器	50
1. 电容器基本理解	50
2. 电容器的动态分析	51
八. 静电的防止与利用	54
1. 静电平衡	54
2. 静电屏蔽	54
CHAPTER 3	57
电路分析与实验	57
一. 电路基础概念	57
1. 电流强度 (Intensity of current)	57
2. 电阻 (Resistance)	57
3. 电压 (Voltage)	58
4. 电源	58
5. 伏安特性曲线	60

6. 电路中的能量转化	62
二. 电路分析基础	66
1. 两种基本电路（串联与并联）	66
2. 电路简化方法	67
3. 含容电路分析	68
4. 等效电源	69
5. 惠更斯电桥	71
三. 电路实验	73
1. 多用电表	73
2. 电表改装与误差分析	80
3. 电阻测量基础方法	83
4. 半偏法测电阻	92
5. 等效法测电阻	100
6. 电桥法测电阻	104
7. 电源电动势与内阻的测量	108
8. 动态电路分析	120
CHAPTER 4	126
磁场	126
一. 认识磁场	126
1. 磁感应强度 (magnetic induction)	126
2. 磁场强度 (拓展)	127
3. 磁感线 (magnetic induction line)	127
二. 磁场对运动电荷的作用	130
1. 洛伦兹力	130
2. 带电粒子在磁场中的简单运动	131
3. 含边界连通区域磁场中的运动分析	133
三. 带电粒子在磁场中的复杂运动	147
1. 磁聚焦与磁发散	147
2. 磁聚焦模型变式	148
四. 洛伦兹力冲量的应用	156
1. 洛伦兹力冲量式的物理本质	157
2. 洛伦兹力冲量的优越性	157
五. 配速法	169
1. 配速法简介	169
2. 配速法的原理分析	176
3. 从相对论视角看配速法 (拓展)	177
六. 安培力 (Ampere force)	178
七. 现代磁学仪器	185
1. 速度选择器	185
2. 质谱仪	185
3. 霍尔元件	187
4. 磁流体发电机	189
5. 电磁流量计	191
6. 回旋加速器	191
CHAPTER 5	196

电磁感应	196
一. 电磁感应基本定律	196
1. 磁通量	196
2. 法拉第电磁感应定律	197
3. 楞次定律	197
4. 右手定则	198
二. 感应电动势产生机制	201
1. 动生电动势的产生原因	201
2. 感生电动势的产生原因	204
3. 电动势计算方法的选取	205
三. 感生电场及其相关应用	208
1. 感生电场的性质	208
2. 电子感应加速器	212
3. 涡流现象 (Eddy Current)	215
4. 电动势与电势差的核心辨析	218
5. 自感现象	221
四. 电磁感应核心问题	224
1. 法拉第圆盘	224
2. 核心参数分析与求解策略	229
3. 电磁感应中的功能关系	241
4. 单双棒切割暂态过程分析	247
5. 复杂含容问题	265
6. 电磁感应中的简谐运动	277
五. 交变电流	282
1. 正弦式交流电	282
2. 有效值的计算	284
六. 变压器与远距离输电	294
1. 理想变压器的应用及分析	294
2. 变压器的等效电阻	298
3. 自耦变压器	302
4. 电流互感器与电压互感器	303
5. 远距离输电	306
七. 电磁振荡与电磁波	313
1. 电磁振荡	313
2. 电磁场与电磁波	316
3. 电磁波谱	316
4. 无线电波的发射和接收	317

CHAPTER 1

矢量积分

一. 从一维标量到三维矢量

在前面的学习中，我们已经认识了定积分：将一个连续变化的过程无限细分，在每个微小区间内进行局部近似，再将所有微元的贡献累加起来。

但上册中所介绍的 **定积分** 主要应用大多局限在一个相对单纯的维度：时间轴或直线轨迹。在这种情况下，积分的对象往往是标量（Scalar），或者方向保持不变的矢量。但在电磁学等领域中，我们还会遇到更加复杂的空间问题

场的非均匀性 电场与磁场充满整个三维空间，其大小和方向在空间中每一点都可能不同；

路径的复杂性 电荷可能在非均匀电场中做复杂的曲线运动；

曲面的几何性 我们需要计算矢量场穿过球面、圆柱面等闭合曲面的通量。

为描述这些累积效应，需要把定积分推广到曲线和曲面上，由此得到两种典型的积分形式：

沿曲线累积-线积分、穿过曲面累积-面积分

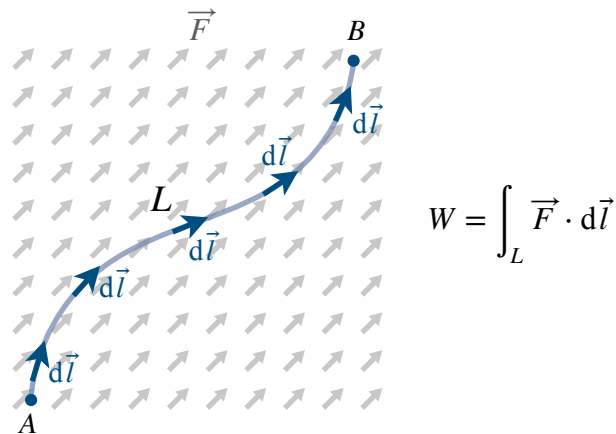
这就是本章的主题：矢量积分。虽然数学形式变得更加复杂，但其核心逻辑依然遵循微积分的三个步骤：

分割、近似、求和

二. 两大典型积分

1. 线积分 (Line Integral)

直观理解 线积分所描述的是某一矢量场沿着某一路径的累积的效应。



我们在力学中学过“功是力在位移上的积累”。在简单的恒力直线运动中， $W = Fx$ 。但在更复杂的场景中，物体往往在大小和方向时刻变化的矢量场中沿曲线运动。为了计算这种情况下的功，我们不能简单地用平均值，而必须严格执行微元分割：

STEP 1 分割 将弯曲的路径 L 无限分割为无数个极微小的线元矢量 $d\vec{l}$ ；

注意 我们的微元均为矢量。

STEP 2 近似 在每一个 $d\vec{l}$ 的尺度上，路径近似为直线，力的矢量 $\vec{F}$ 近似为恒定。此时，力在这一微小位移上所做的微功 dW ，即为力矢量 $\vec{F}$ 与线元矢量 $d\vec{l}$ 的点积

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

STEP 3 求和 当我们把这无数个微小的“投影积累”沿着整条路径累加起来，就得到了矢量场沿该路径的线积分

$$W = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

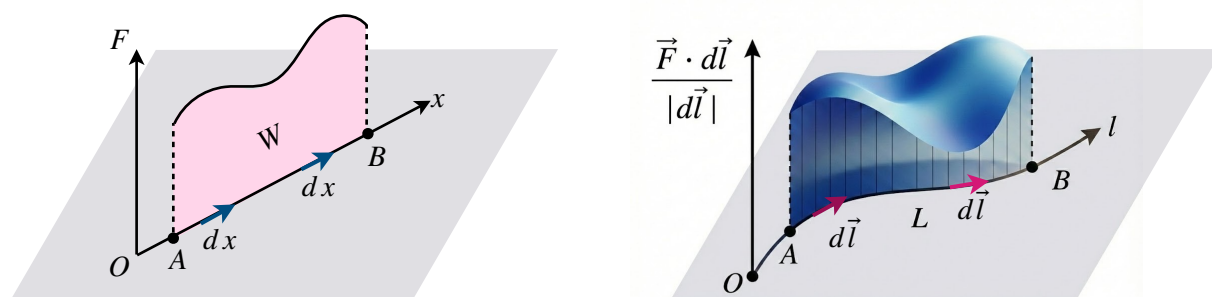
理解 $\int_L$ 有两层含义：“ $\int$ ”代表求和，而下角标 L 标识着积分路径，意为沿着路径 L 进行积分。

与定积分的联系 一维定积分本质上可以看作路径被限制在一条直线上的线积分。

积分路径

a. 定积分 $\int_a^b f(x)dx$: 路径被锁死在 x 轴上。只能从 $x = a$ 到 $x = b$ ，路径是一条直线。这里的 dx 虽然表示微小位移，但它默认方向沿 x 轴正方向，通常被视为标量处理；

b. 线积分 $\int_L \vec{F} \cdot d\vec{l}$: 路径是三维空间中一条任意弯曲的曲线 L 。这里的 $d\vec{l}$ 是一个矢量，它时刻沿着路径的切线方向，随着运动， $d\vec{l}$ 的方向在不断变化。



被积对象 从数值到投影

a. 定积分 $\int_a^b f(x)dx$: 被积函数 $f(x)$ 仅仅是一个数值（标量）。在几何上，它代表矩形的高度。我们只关心在 x 处函数值是多少

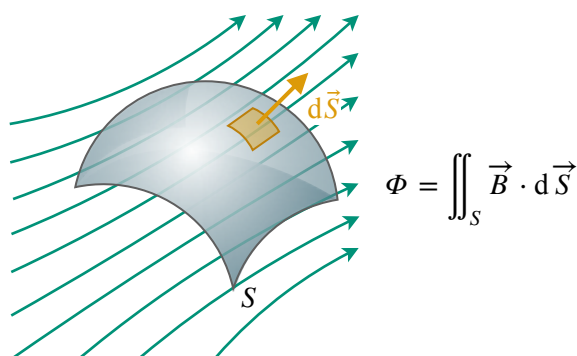
b. 线积分 $\int_L \vec{F} \cdot d\vec{l}$: 被积对象涉及两个矢量的关系：场矢量 $\vec{F}$ 和路径矢量 $d\vec{l}$ ，我们通过向量点积来运算。

这意味着，我们关心的不是 $\vec{F}$ 的模长，而是 $\vec{F}$ 在路径切线方向上的投影 $\frac{\vec{F} \cdot d\vec{l}}{|d\vec{l}|}$ 。

理解 在定积分中，只要 $f(x) \neq 0$ ，积分通常不为零（面积）；但在矢量场的线积分中，即使场 $\vec{F}$ 很大，如果它始终与运动方向垂直（ $\vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$ ，如洛伦兹力），那么点积为0，线积分依旧为0。

2. 面积分 (Surface Integral)

直观理解 面积分所描述的是一个矢量场通过某一个曲面的总通量。



在电磁场中，常用一系列带方向的场线表示场的空间分布。为了量化某个矢量场有多少“穿过”指定曲面 S ，需要计算该矢量场通过曲面的通量。

如果曲面是平面，场又处处均匀且垂直于曲面，则通量可以简单写为 $\Phi = BS$ 。

但当曲面弯曲，或者场的大小、方向随位置变化时，必须将曲面分割为许多微小面元。这里需要引入一个极其重要的概念：面积元也是一个矢量。

面积元矢量大小 等于微小切片的面积 dS

方向 定义为该微小面的法线方向（垂直于 dS ）

STEP 1 分割 将弯曲的曲面 S 无限分割为无数个极微小的面积元矢量 $d\vec{S}$ ；

STEP 2 近似 以计算磁通量为例，在每一个 $d\vec{S}$ 的尺度上，计算穿透量时，真正有效的是平行于法线方向（即垂直于面）的场分量。因此，我们计算矢量场 $\vec{B}$ 与面积元矢量 $d\vec{S}$ 的点积，得到通过 $d\vec{S}$ 的通量微元

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

STEP 3 求和 将所有这些微小的穿透量在整个曲面上进行累加，即得到该矢量场通过该曲面的通量

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

理解 如何理解表达式中的两个积分号“ $\iint$ ”，事实上这是一种维度的表示：当我们写一个 $\int$ 时，表示在一维的线上进行累加；写两个 $\iint$ 时，表示在二维的面内进行累加。因此， $\iint$ 本质上是在讲：为了遍历这个二维的曲面 S 需要两个参数来描述（比如 x 和 y ），每一个自由度对应一次积分过程。

但在高中阶段的实际应用中，在具有对称性或某个方向上的物理量保持不变时，面积分有时可以进一步化为一重积分，但这属于后续具体计算方法。

小结 本章的目的更多是为了让大家对这两种形式的积分有初步认识，明白表达式的含义即可，至于具体的应用以及运算在后续章节中会带大家逐渐掌握熟悉。

CHAPTER 2

静电场

一. 静电场基础知识

1. 电荷及相关知识

电荷定义 电荷是物质的一种基本属性。物体带了电，也称有了电荷，带电的物体叫带电体。

分类 自然界内只有两种电荷 — 正电荷和负电荷。

性质 同种电荷相互排斥，异种电荷相互吸引。

带电量定义 电荷的多少叫作带电量，用字母 Q 或 q 表示，国际单位制为：库仑（C）。正电荷的电量为正值，负电荷的电量为负值。

注意 电荷是标量，正负号代表的是种类而非方向。

电荷守恒定律 在一个与外界没有电荷交换的系统中，电荷既不会凭空产生，也不会消灭。它只能在物体内部或物体间相互转移，在转移过程中，电荷的总量（代数和）保持不变。

导体与绝缘体

分类标准 内部含自由电子的是导体（如金属），内部几乎没有自由电子的是绝缘体（如塑料）。

原因 自由电子受原子核的束缚作用小，可在外加电场中移动，这也是导体导电的决定特性。

物体带电的方法 常见的有三种起电方式可使物体带电，但在讨论这三种方法之前，必须明确一个前提：

起电并非“创造”了电荷，而是电子在不同物体间或物体内部的“搬运”。

(1) **摩擦起电** 两种不同材料的物体相互摩擦，使其分别带上等量异种电荷的过程。

适用范围 通常适用于绝缘体。

结果 失去电子的物体带正电，得到电子的物体带负电，两物体带等量、异种电荷。

(2) **接触起电** 带电体与导体接触，使电荷从一个物体转移到另一个物体的过程。

适用范围 通常适用于导体。

结果 两物体最终带同种电荷，电荷量通常不均分，与导体的形状、大小及电容有关。只有当两个完全相同的导体接触时，电荷量才会平分。

(3) **感应起电** 带电体靠近导体时（非接触），导体内自由电荷移动，靠近带电体一侧带异种电荷，远一侧带同种电荷。

适用范围 通常适用于导体；

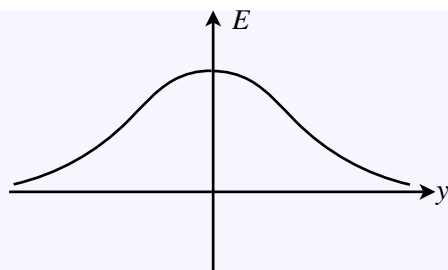
本质 静电感应是导体中自由电荷在外电场作用下重新分布的过程。导体自身的正、负电荷总量并未改变，图示如下：



理解 起电的本质是电荷的转移，而转移过程中系统总电荷不变。

思考 在感应起电状态下，将导体任意部位接地，导体的带电状况如何？

答案 近端电性不变，远端均不带电；导体与地球通过导线连通，形成一个新系统。在这个新系统中，原来的导体只是近端，而地球变成了无限大的新远端。图示如下：



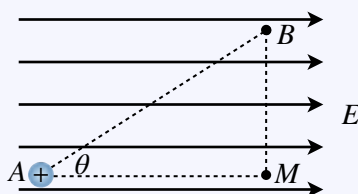
四. 静电场中的功能关系

1. 静电力做功

做功特点 在上册中已有提及，由于静电场是保守场，因此在电荷移动受力时：

静电力所做的功只与电荷的起始和终止位置有关，与电荷移动的路径无关。

简略证明 设空间中存在电场强度为 E 的匀强电场，在电场中任取两点 A 和 B ，把试探电荷 q 沿着不同的路径从 A 移动到 B ，计算整个过程静电力对电荷所做的功。设小球起点和终点的连线与电场强度方向夹角为 θ ，图示如下



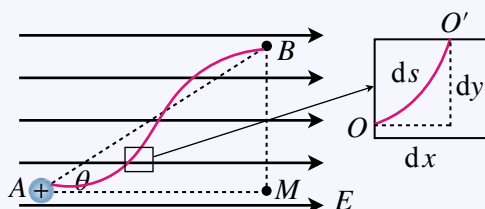
若小球移动路径沿着 AB 直线，用向量乘法表示其对小球做的功：

$$W_{AB} = \vec{F} \cdot \vec{d} = q\vec{E} \cdot \vec{d} = qE|AB|\cos\theta = qE|AM|$$

若小球经 M 点，由路径 AM 、 MB 移动，静电力对小球做的功：

$$W = W_{AM} + W_{MB} = qE|AM| + 0$$

此时，考虑小球沿任意路径从 A 点到 B 点的情况。将路径拆分为无数个微元，在每个微元里，小球的运动都做类似于先沿 AM 方向再沿 MB 方向的运动，图示如下



对于任意一个微元弧长 ds ，从 O 到 O' 的过程替换为先经过 dx 再经过 dy 。而 dy 过程静电力不做功，只有 dx 过程静电力做功，因此全过程累积起的总功 $W = \int qE dx = qE|AM|$ ，与路径无关。

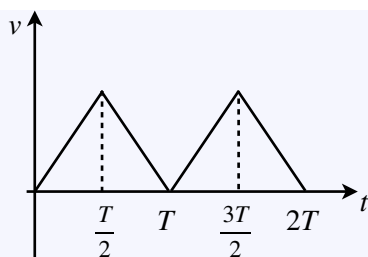
严谨证明（拓展） 设空间中存在一个电量为 $+Q$ 的点电荷，其在空间中产生的电场强度为：

$$E = \frac{kQ}{r^2} \vec{r}$$

$\vec{r}$ 是径向单位向量，将试探电荷从 A 点移动到 B 点，静电力对试探电荷 q 做的功为：

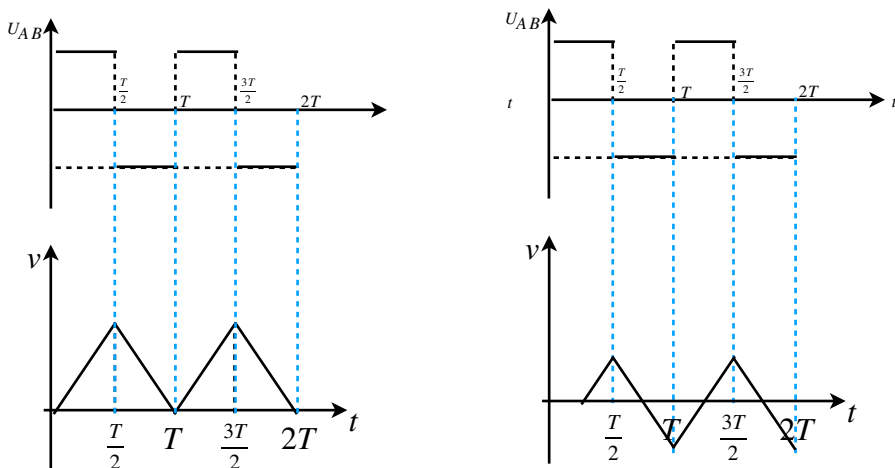
$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \frac{qQ}{k} \int_A^B \frac{\vec{r} \cdot d\vec{l}}{r^2}$$

注意到 $\vec{r} \cdot d\vec{l}$ 是位移 $d\vec{l}$ 在径向方向的分量，近似为径向距离的微分 dr ，图示如下



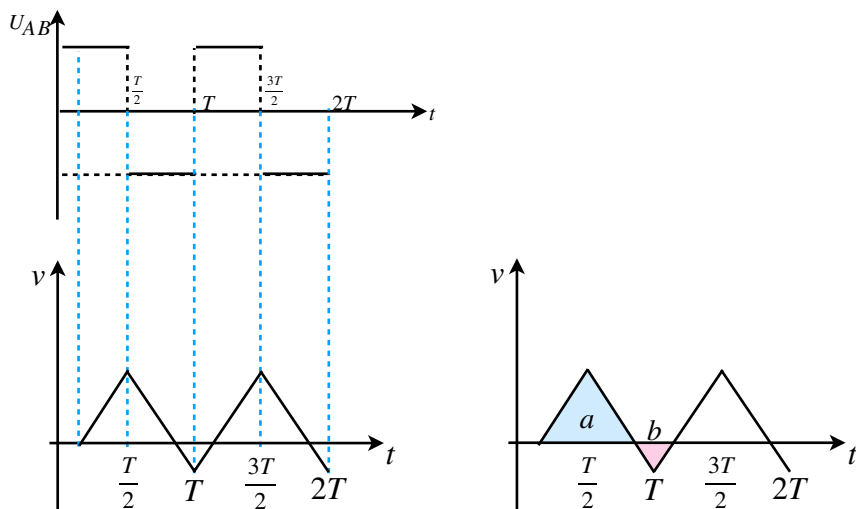
由图可知，虽然粒子的加速度方向有变化，但运动方向始终向下，直至打中B板。

思考 若粒子在 $\frac{T}{4}$ 时刻才进入电场，粒子的运动情况会发生什么变化？那么在其他时刻放入电场呢？



答案 以电场转向时刻为界，对粒子运动过程分段分析。粒子在 $[\frac{T}{4}, \frac{T}{2}]$ 内做加速度大小为 $\frac{qE}{m}$ ，方向向下的匀加速直线运动；在 $[\frac{T}{2}, T]$ 内做加速度大小相同，方向向上的匀加速直线运动（粒子先做匀减速运动至速度为0，再做反方向的匀加速运动直至速度大小与减速前相同）。若时间足够长，粒子在板间做往复运动。

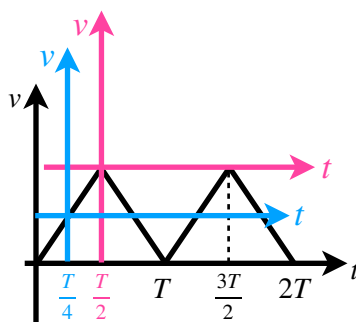
变式 若粒子在 $\frac{T}{8}$ 时才进入板间：



同样，对运动进行分段分析。在 $[\frac{T}{8}, \frac{T}{2}]$ 内，粒子加速度大小为 $\frac{qE}{m}$ ，方向向下；在 $[\frac{T}{2}, T]$ 内做加速度大小相同，方向向上。根据匀变速运动学知识， a, b 两区域面积之比（正向位移和负向位移之比）为9:1，故粒子整体呈现迂回式向下运动的运动方式直至打中B板。

思考 如何快速画出不同时间入射的 $v-t$ 图象？

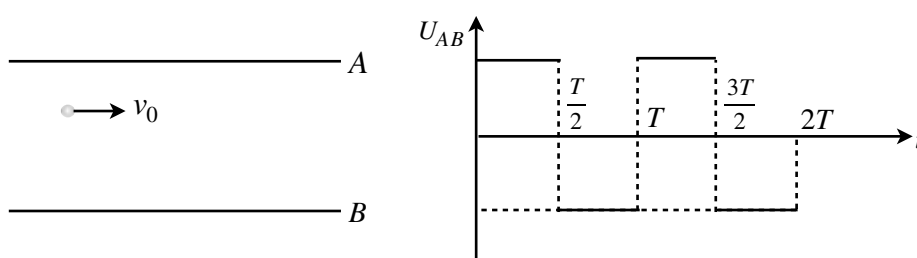
答案 电场变化的节奏恒定，即 $v-t$ 图像的形状是不变的，那么变化的只有粒子出现在电场中的时刻。



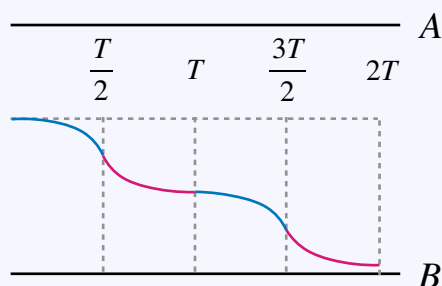
仅移动 $v-t$ 坐标轴，将原点移动到 $v-t$ 时刻释放的粒子 $v-t$ 上对应时间的坐标点上即可。相当于构建新的坐标系（伽利略变换），就获得了以目标粒子为观测对象的 $v-t$ 曲线。

曲线运动 粒子初速度与电场方向垂直时，粒子在变化的偏转电场中做变速曲线运动。相当于给交变电场中的直线运动垂直叠加一个匀速运动。

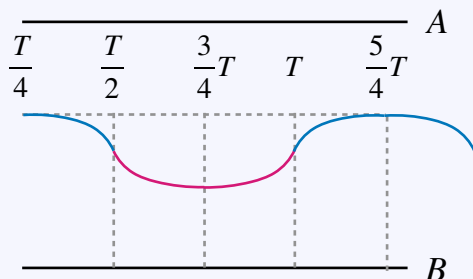
典例分析 一带电粒子以初速度 v_0 垂直入射进两板之间，在板间加入方波电场 U_{AB} ，观察粒子运动情况。改变粒子入射时刻，观察运动变化情况。



分析 在 $t=0$ 时刻释放粒子，在 $[0, \frac{T}{2}]$ 内粒子加速度大小为 $\frac{qE}{m}$ ，方向向下； $[\frac{T}{2}, T]$ 内加速度大小相同方向向上，粒子轨迹如下图所示：



若在 $t = \frac{T}{4}$ 时刻释放粒子，粒子在 $[\frac{T}{4}, \frac{T}{2}]$ 内加速度大小为 $\frac{qE}{m}$ ，方向向下；在 $[\frac{T}{2}, T]$ 内加速度大小相同，方向向上。在直线运动中分析出，粒子在竖直方向上做往复运动，运动轨迹如下：

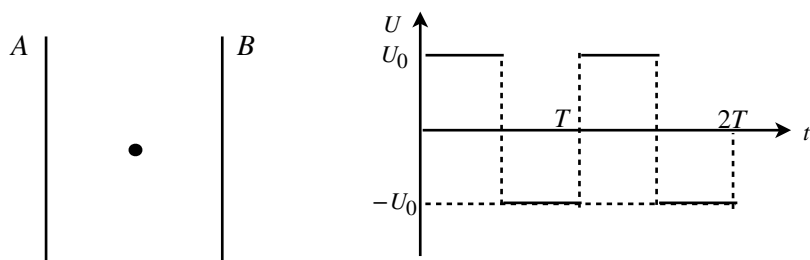


此粒子若在 $\frac{3}{4}T$ 时刻及之前未能打中B板，则无法打中B板。

因此，可以将交变电场中的曲线运动进行分解，分解为匀速运动和电场方向上的变速运动，然后分别分析两个运动。

TUTORCAT

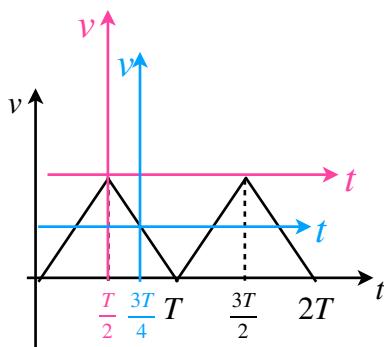
EXAMPLE 1 如图所示、两平行正对的金属板 A, B 同加有如图所示的交变电压、一重力可忽略不计的带正电粒子被固定在两板的正中间 P 处。若在 t_0 时刻释放该粒子，粒子会时而向 A 板运动，时而向 B 板运动，并最终打在 A 板上。则 t_0 可能属于的时间段是



- A. $0 < t_0 < \frac{T}{4}$ B. $\frac{T}{2} < t_0 < \frac{3T}{4}$ C. $\frac{3T}{4} < t_0 < T$ D. $T < t_0 < \frac{9T}{8}$

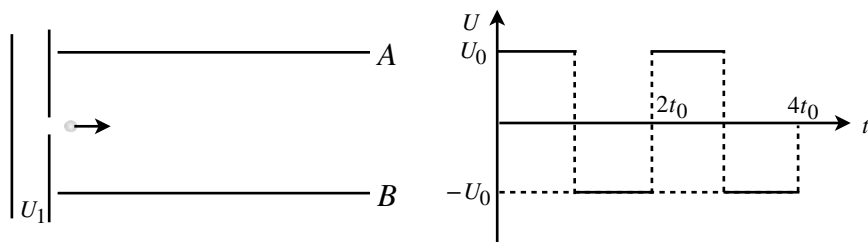
解析

粒子带正电，电压为正时加速度向右，设右方为正方向。要满足粒子最终打在 A 板上的条件，需要使粒子总位移是负值。对 $v-t$ 图象进行分析，在 $t=0$ 时刻释放的粒子 $v-t$ 图象基础上移动坐标轴，观察图象与轴围成的面积：



在给出的选项中，只有 $\frac{T}{2} < t_0 < \frac{3T}{4}$ 时，才能满足粒子总体运动方向是负的。综上，答案为 B。

EXAMPLE 2 如图甲所示，电子加速器的加速电压为 U_1 ，偏转电场的极板相距为 d 的两块水平平行放置的导体板。大量电子由静止开始经加速电场加速后，连续不断地沿导体板的方向从两板正中间射入偏转电场。当两板不带电时，这些电子通过两板之间的时间为 $2t_0$ ，当在两板间加如图乙所示的周期为 $2t_0$ 、偏转电压最大值为 U_0 （ U_0 未知）的交变电压时，偏移量最大的电子恰好从两极板边缘射出，已知电子的电荷量为 $-e$ ，质量为 m ，电子的重力和它们之间相互作用力均忽略不计，求：



- (1) 偏转电场的偏转电压 U_0 ；
- (2) 从距离中线上方 $\frac{d}{3}$ 飞出偏转电场的粒子进入偏转电场的时刻。

解析

(1) 分析条件：偏移量最大的电子恰好从两极板边缘射出。所有粒子在偏移电场中的运动时间都是一个方波周期，所以粒子偏移量最大意味着在竖直方向上，粒子运动方向始终不变。只有在 $t=0$ 时刻进入偏移电场才能满足条件。在竖直方向上，粒子前半周期被加速，后半周期被减速，末速度为零，板间宽度为 d ，故此粒子 $y = \frac{d}{2}$ 。列出运动学方程

CHAPTER 3

电路分析与实验

一. 电路基础概念

1. 电流强度 (Intensity of current)

宏观定义 单位时间流过导体的电荷量，用符号 I 表示，其定义式为 $I = \frac{dq}{dt}$ 。

单位 安培 (A)，量纲换算为 $1A = 1C/s$ ，其中，C 为电荷单位库伦，s 为秒。

方向 正电荷移动方向。

注意 电流虽有正方向，但实际上为标量。

决定式 由闭合电路欧姆定律得 $I = \frac{E}{(R+r)}$ ，其中， E 为电源电动势， R 为外电路等效电阻， r 为电源内阻。

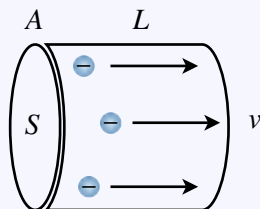
微观解释 在金属导体内部，充满了自由电子充当载流子。

没有电流时 (热运动) 这些电子以极高的速度 (约 10^5 m/s) 向四面八方杂乱无章地高速运动。因为方向是随机的，宏观上它们哪里也没去，所以电流为零；

有电流时 (定向漂移) 当接通电源时，电场建立。电子依然在乱跑，但整体上会沿着电场力的方向缓慢地发生位移，这种在热运动基础上叠加的缓慢定向移动，被称为漂移运动，正是它形成了电流。

公式 $I = neSv$ 。其中， n 为金属导体单位体积内的自由电子数， e 为电子的电荷量， S 为导线的横截面积， v 为电子定向移动的平均速率。

推导 我们根据电流的定义式 $I = \frac{dq}{dt}$ 进行推导。对于一段极短的时间 dt 内能够通过横截面 A 的载流子为一段圆柱体，如下图所示



这段圆柱体的长度 $L = v \cdot dt$ ，体积 $dV = SL = Svdt$ ，包含的载流子总数为 $N = ndV$ ，总电荷量

$$dq = Ne = neSvdt$$

根据定义式 $I = \frac{dq}{dt}$ 可得， $I = neSv$ 。

2. 电阻 (Resistance)

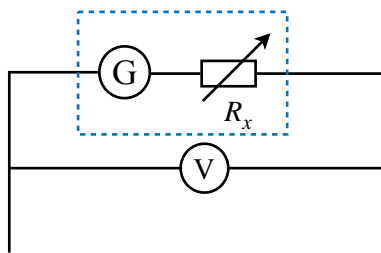
宏观定义 表示导体对电流的阻碍作用，用符号 R 表示。其定义式为 $R = \frac{U}{I}$ 。

单位 欧姆 (Ω)，量纲换算为 $1\Omega = 1V/A$ 。

物理意义 反映导体本身阻碍电流性质的物理量。

注意 电阻是导体本身的属性。 $R = \frac{U}{I}$ 仅为定义式，导体电阻不随电压 U 或电流 I 的变化而改变。

决定式 由电阻定律得，一段导线的电阻为 $R = \frac{\rho L}{S}$ 。其中， ρ 为材料电阻率 (仅由材料性质与温度决定)， L 为导线长度， S 为导线横截面积。



改装电压表的读数 $\frac{\text{表头偏转角度}}{\text{表头满偏角度}} \times \text{改装后的电表量程}$ ，其真实电压为 $I_g(R_g + R_x)$ 。

a. 改装电压表读数 > 准确电压表读数 $\Rightarrow R_x$ 应增大；

分析 角度1: 我们在读数时，仍认为改装表为 3V 的量程，说明改装表偏角偏大，其表头在相同电流时更容易发生偏转，因此 R_x 偏小，真实量程小于其预计改装量程。应调高 R_x ，使其实际量程与预计改装量程相同。

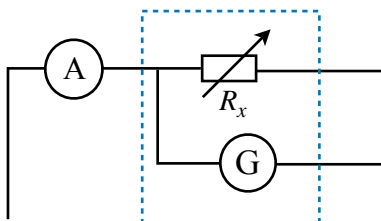
角度2: 表头偏转幅度仅由流过 G 的电流大小决定，设真实电压（标准表读数）为 2V，此时有

$I_g(R_g + R_x) = 2$ ，而我们的偏角大于预测值，因此 I_g 偏大，显然 R_x 偏小。

b. 改装电压表读数 < 准确电压表读数 $\Rightarrow R_x$ 应减小。

分析 同理可知， R_x 偏大，应减小电阻箱阻值，使其实际量程与预计改装量程相同。

Case2 电流表校准 将待校准结构与标准电流表串联，图示如下



改装电流表的示数为： $\frac{\text{表头偏转角度}}{\text{表头满偏角度}} \times \text{改装后的电表量程}$ ，其真实电流为 $I = I_g(1 + \frac{R_g}{R_x})$ 。

a. 改装电流表读数大于准确电流表读数 $\Rightarrow R_x$ 应减小；

分析 设真实电流（标准表读数）为 0.5A，此时有 $0.5 = I_g(1 + \frac{R_g}{R_x})$ ，而我们的偏角大于预测值，因此 I_g 偏大，显然 R_x 偏大。

b. 改装电流表读数小于准确电流表读数 $\Rightarrow R_x$ 应增大。

分析 同理可知， R_x 偏小，应增大电阻箱阻值。

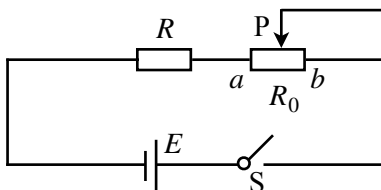
3. 电阻测量基础方法

伏安法 根据 $R = \frac{U}{I}$ 可知，要想测量一个电阻的阻值，最基本的方法便是测量出电阻两端的 U 与通过电阻的 I ，这便是伏安法。该方法是一切电阻测量变式的基础，结合电表改装衍生出许多其他方法，读者务必掌握。

补充 相对误差的定义： $\eta = \frac{|\text{测量值} - \text{真实值}|}{\text{真实值}} \times 100\%$

在进行电学测量时，常常需要控制和调节加在测量对象上的电压或电流，在电源电动势选定后，这个调节可以由滑动变阻器构成的分压限流电路来完成。因此，在介绍伏安法之前我们需要先了解区分两种电路连接方式：**限流式与分压式**

限流式 通过滑动变阻器调节电路电流，以达到测量多组数据的目的，图示如下



调节范围 R 两侧的电压变化范围为 $[\frac{E}{R+R_0}R, E]$ ；电流变化范围为 $[\frac{E}{R+R_0}, \frac{E}{R}]$ ，其中 R_0 滑动变阻器最大阻值。

分析 设 R_x 为滑动变阻器接入电路的阻值，则干路电流为

$$I = \frac{E}{R + R_x}$$

当 P 移动到 a 点时， $R_x = 0$ ， $I_{\max} = \frac{E}{R}$ ；当 P 移动到 b 点时， $R_x = R_0$ ， $I_{\min} = \frac{E}{R + R_0}$ 。

滑动变阻器的选取原则 一般情况下滑动变阻器为待测电阻的 3~5 倍即可，滑动变阻器阻值太小则电压变化范围太小，太大则难以操作滑动变阻器，如果有电阻箱则一般选择电阻箱；

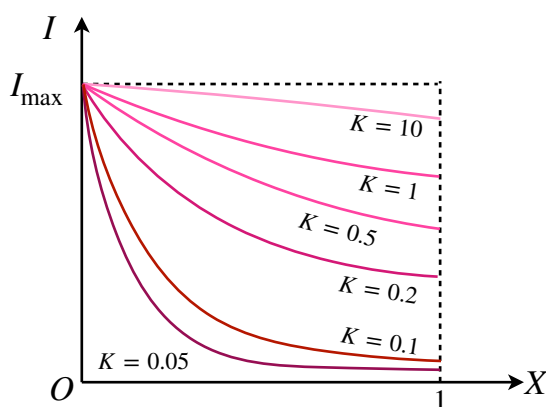
优点 电路简单，节能；

关键词 题目出现电路简单、要求节能、滑动变阻器大于待测电阻等字样时使用限流式。

限流特性曲线（拓展） 我们对流过负载的电流进一步分析，一般情况下流过 R 的电流为

$$I = \frac{E}{R + R_x} = \frac{\frac{E}{R_0}}{\frac{R}{R_0} + \frac{R_x}{R_0}} = \frac{I_{\max}K}{K + X}$$

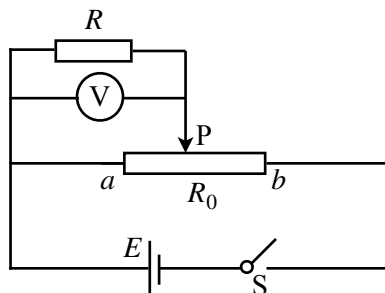
其中， $K = \frac{R}{R_0}$ ， $X = \frac{R_x}{R_0}$ 。当滑动变阻器最大阻值 R_0 发生变化， K 值随之变化，下图为不同 K 值下的限流特性曲线（ $I-X$ 图像），我们可以看到如下几个特点



- (1) K 越大，在相同 X 变化（ R_x 的变化）下，电流调节范围越小；
- (2) $K \geq 1$ 时调节的线性较好，不至于微调 R_x 电流迅速变化或几乎不变化；
- (3) K 较小时（即 $R_0 \gg R$ ）， X 接近 0 时电流变化很大，细调程度较差；
- (4) 不论 R 大小如何，负载 R 上通过的电流都不可能为零。

而在实际应用中，我们一般想尽可能的使电流变化范围为 $[\frac{E}{R+R_0}, \frac{E}{R}]$ 变大，因此必然要让 R_0 增大导致 $K \downarrow$ ，这就导致了微调电流的困难，因此一般情况下均不适用限流法。

分压式 调节并联电路的分压比例来调节待测电阻两侧的电压图示如下



调节范围 R 两侧的电压变化范围为 $[0, E]$ ；电流变化范围为 $[0, \frac{E}{R}]$ 。

分析 当滑动头 P 由 a 端滑至 b 端, 负载上电压由 0 变至 E , 调节的范围与变阻器的阻值无关。

滑动变阻器的选取 一般情况下滑动变阻器要小于待测电阻, 阻值不能太大, 否则难以操作。

优点 可以从零开始测量电压, 测量范围大, 可以起到保护电路的作用。

关键词 题目出现电压变化从零开始、要求测量多组数据、要求尽可能准确、需要更大的调节范围、待测元件为小灯泡、滑动变阻器小于待测电阻、要求减小误差, 则选择分压。

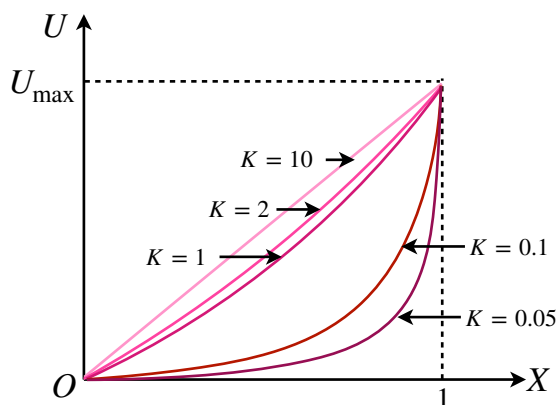
补充 在实际做题中分压式所具有的优点远大于限流式, 所以考察分压式的题型更多。

总结 能分压不限流; 要节能、简单, 选限流。

分压特性曲线 (拓展) 当滑动头 P 在任一位置时, aP 两端的分压值 U 为

$$U = \frac{E}{\frac{R \cdot R_{aP}}{R + R_{aP}} + R_{Pb}} \cdot \frac{R \cdot R_{aP}}{R + R_{aP}} = \frac{E R R_{aP}}{R R_0 + R_{aP} R_{Pb}} = \frac{\frac{R}{R_0} \cdot R_{aP} E}{R + \frac{R_{aP}}{R_0} R_{Pb}} = \frac{K R_{aP} E}{R + X R_{Pb}}$$

其中, $R_0 = R_{aP} + R_{Pb}$, $K = \frac{R}{R_0}$, $X = \frac{R_{aP}}{R_0}$ 。当滑动变阻器最大阻值 R_0 发生变化, K 值随之变化, 下图为不同 K 值下的分压特性曲线 ($U-X$ 图像), 我们可以看到如下几个特点



- (1) 不论 R_0 的大小, 负载 R 的电压调节范围均可从 $0 \rightarrow E$;
- (2) K 越小电压调节越不均匀, 越非线性;
- (3) K 越大电压调节越均匀, 因此要电压 U 在 0 到 $U_{\max}$ 整个范围内均匀变化, 则取 $K > 1$ 较合适。

理解 这就是要求滑动变阻器最大阻值 R_0 小于待测电阻 R 的原因。

注意 从调节的均匀度考虑, R_0 越小越好。但同时 R_0 上的功耗也将变大, 因此还要考虑节能问题 (但考试一般不考虑这点, 所以 R_0 越小越好), 则 R_0 不宜取得过小。此外, 应注意流过变阻器的总电流不能超过它的额定值。

实验器材选择原则

- (1) 电压表、电流表: 不超过量程, 且要超过满偏刻度的 $\frac{1}{3}$;

a. 先选电压表: 看电源电动势、看待测仪器额定电压后选择接近的;

解析

(1) 电压表的量程 $0\sim 1V$ ，其内阻具体值不知道，电流表内阻也不知道，所以无法对这两块表进行改装，电源电动势 $E = 6V$ ，所以需要使用滑动变阻器的分压式接法，由于待测电阻约为 $2k\Omega$ ，所以采用电流表内接，综合以上分析，丁方案比较合理。

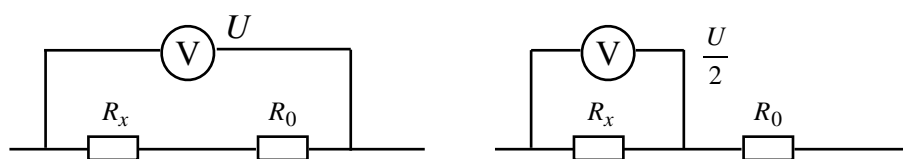
(2) ②③调节滑动变阻器 R ，由欧姆定律得 $R' = \frac{R_p R_V}{R_p + R_V} = \frac{U_1}{I_1} = 900\Omega$

$$R'' = \frac{R_x R'}{R_x + R'} = \frac{U_2}{I_2} = 600\Omega, \text{ 解得 } R_x = 1800\Omega = 1.8k\Omega$$

④根据以上计算可知，该方案能消除电表内阻造成的误差。

4. 半偏法测电阻

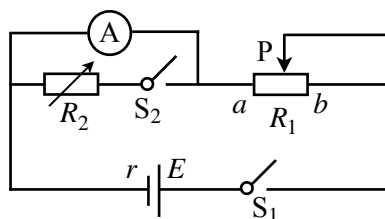
思考 现有一理想电压表，其中 R_x 为待测电阻， R_0 为已知电阻，如下图所示，两次测量时电压表示数分别为 U 、 $\frac{U}{2}$ ，那么 R_x 的电阻为多少？



答案 $R_x = R_0$ ，显然二者分压能力相同，因此二者电阻相同。

理解 这便是半偏法最基本的逻辑，利用地位的等效，推出待测电阻与已知电阻阻值的关系。

电流半偏法（有误差） 假设待测电阻为电流表内阻 R_A ，要求 $R_1 \gg R_A$ ，图示如下



实验步骤

STEP 1 P 滑至 b 端，调节 R_2 至最大（保护电路）；

STEP 2 先断开 S_2 ，再闭合 S_1 ，将 R_1 由最大阻值逐渐调小，使电流表读数达到量程 I_m ；

STEP 3 保持 R_1 不变，闭合 S_2 ，将电阻箱 R_2 由最大阻值逐渐调小，使电流表读数 $\frac{1}{2}I_m$ （半偏）；

STEP 4 记录此时电阻箱 R_2 的值，则 $R_A = R_2$ 。

原理 当闭合 S_2 时，因为 $R_1 \gg R_A$ ，故总电流变化极小，认为不变仍为 I_m ，电流表读数为 $\frac{I_m}{2}$ ，则 R_2 中电流为 $\frac{I_m}{2}$ ，所以 $R_A = R_2$ 。

误差分析 R_A 的测量值小于真实值。

分析 实验原理假设闭合开关 S_2 后，干路电流保持 I_m 不变。但实际上：并联后的电路总电阻必然减小，根据闭合电路欧姆定律 $I = \frac{E}{R + r}$ ，总电阻 R 减小导致干路总电流增大，此时 $I > I_m$

对于支路电流分配：此时电流表读数为 $\frac{1}{2}I_m$ ，因此流过电阻箱 R_2 的电流为：

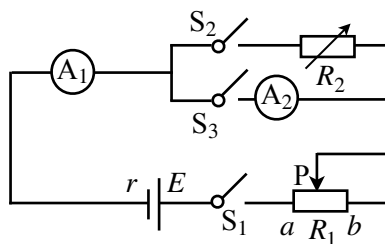
$$I_{R_2} = I - \frac{I_m}{2} > \frac{I_m}{2}$$

即流过电阻箱的电流大于流过电流表的电流 ($I_{R_2} > I_A$)，故： $R_2 < R_A$

我们将电阻箱读数 R_2 当作 R_A 的测量结果，故测量值小于真实值。

为了避免这种系统误差，有如下改进版的电流半偏法。

电流半偏法（无误差） 待测电阻为 A_2 内阻 R_{A_2} ，图示如下



实验步骤

STEP 1 P 滑至 b 端，调节 R_2 至最大（保护电路）；

STEP 2 先断开 S_2 ，再闭合 S_1 、 S_3 ，滑动 P ，使 A_2 满偏，读取 A_1 示数 I_m ；

STEP 3 闭合 S_2 ，同时调节 R_1 、 R_2 ，保持 A_1 示数不变，使 A_2 半偏；

STEP 4 记录此时电阻箱 R_2 的值，则 $R_{A_2} = R_2$ 。

误差分析 此时无系统误差。

分析 与传统半偏法最大的区别在于引入了 A_1 作为监控表。在 **STEP 3** 中，闭合 S_2 后，虽然并联电导致电阻减小，但通过调节 R_1 ，强制保持 A_1 的示数不变。因此

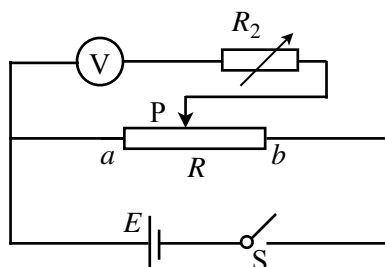
流向并联部分的总电流 I 始终为满偏电流（即 I_m ）的水平，没有发生改变。

已知总电流保持为 I_m ，且 A_2 被调节为半偏状态，则流过电阻箱的电流为：

$$I_{R_2} = I_m - \frac{1}{2}I_m = \frac{1}{2}I_m$$

因此，两者的电阻值必然相等，即 $R_{A_2} = R_2$ ，无系统误差

电压半偏法 电压表内阻 R_V 为待测电阻，需 $R_V \gg R$ 图示如下



实验步骤

STEP 1 P 滑至 a 端， R_2 调为0（保护电路）；

STEP 2 闭合 S ，滑动 P 使电压表 V 满偏；

STEP 3 保持 P 不动，调节 R_2 使电压表 V 半偏；

STEP 4 记录此时电阻箱 R_2 的值，则 $R_V = R_2$ 。

原理 $R_V \gg R$ ， R_2 接入电路时可认为电压表和 R_2 两端的总电压不变，仍为 U_m ，当电压表示数调为 $\frac{U_m}{2}$ 时， R_2 两端电压也为 $\frac{U_m}{2}$ ，则二者电阻相等，即 $R_V = R_2$ 。

误差分析 R_V 的测量值大于真实值

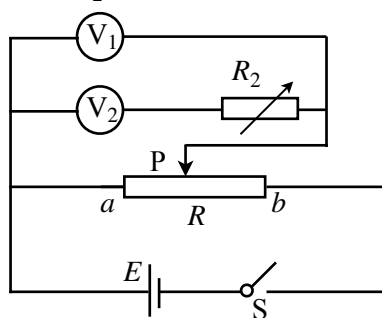
分析 假设调节 R_2 后，支路分压保持 U_m 不变。但实际上：串联后的电路总电阻必然增大，因此支路总电压增大，此时 $U > U_m$ 。对于支路电压分配：此时电压表读数为 $\frac{1}{2}U_m$ ，因此电阻箱 R_2 的分压为：

$$U_{R_2} = U - \frac{U_m}{2} > \frac{U_m}{2}$$

即电阻箱的分压大于电压表的分压（ $U_{R_2} > U_V$ ），故： $R_2 > R_V$

我们将电阻箱读数 R_2 当作 R_V 的测量结果，故测量值大于真实值。

电压半偏法（无误差）待测电阻为 V_2 内阻 R_{V_2} ，图示如下



实验步骤

- STEP 1** P 滑至 a 端，调节 R_2 至最大（保护电路）；
STEP 2 闭合 S ，滑动 P 使电压表 V_2 满偏，读取 V_1 示数 U_m ；
STEP 3 同时调节 R 、 R_2 ，保持 V_1 示数不变，使 V_2 半偏；
STEP 4 记录此时电阻箱 R_2 的值，则 $R_{V_2} = R_2$ 。

误差分析 此时无系统误差。

分析 闭合 S_2 后，虽然串联电阻导致电阻增加，但通过调节 R ，强制保持 V_1 的示数不变。因此

并联部分的总分压 U 始终为满偏电压（即 U_m ）的水平，没有发生改变。

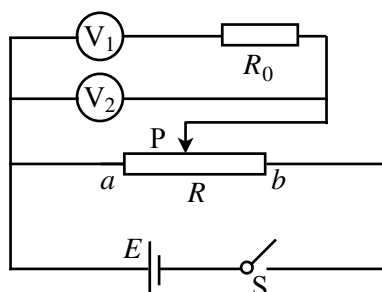
已知总分压保持为 U_m ，且 V_2 被调节为半偏状态，则电阻箱的分压为：

$$U_{R_2} = U_m - \frac{1}{2}U_m = \frac{1}{2}U_m$$

因此，两者的电阻值必然相等，即 $R_{V_2} = R_2$ ，无系统误差

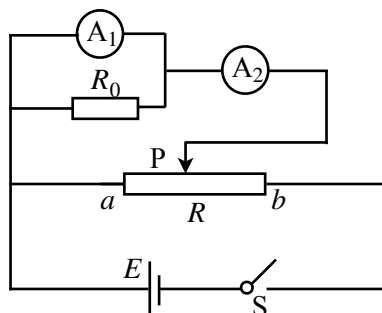
变式 改进后的电压、电流半偏法电路图也可用来直接求电表内阻，同伏伏、安安法结合即可

典例1 如下图所示， R_0 为已知量，试求电压表 V_1 内阻 R_V



分析 R_0 两端的电压 $U_0 = U_2 - U_1$ ，由串联分压规律可得 $R_V = \frac{U_1}{U_0} R_0 = \frac{U_1}{U_2 - U_1} R_0$ 。

典例2 如下图所示， R_0 为已知量，试求电流表 A_1 内阻 R_A



分析 R_0 两端的电流 $I_0 = I_2 - I_1$ ，由并联分流规律可得 $R_A = \frac{I_2 - I_1}{I_1} R_0$ 。

分析 根据闭合电路欧姆定律 $E = U + \frac{U}{R}r$ ，取 $\frac{1}{U}$ 作为 y 轴变量， $\frac{1}{R}$ 为 x 轴变量。得到

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{E} + \frac{r}{E} \cdot \frac{1}{R}$$

$\frac{1}{U} - \frac{1}{R}$ 图象如上：斜率 $k = \frac{r}{E}$ ；截距 $b = \frac{1}{E}$ ，由此得到 E 、 r 的测量值： $E = \frac{1}{b}$ ， $r = \frac{k}{b}$ 。

但在实际情况下要考虑电压表内阻 R_V 。此时 $E = U + \frac{U}{R//R_V}r \Rightarrow \frac{1}{U} = \frac{1}{E} + \frac{r}{E(R//R_V)}$

$$\Rightarrow \frac{1}{U} = \frac{1}{E} + \frac{r(R+R_V)}{ER R_V} \Rightarrow \frac{1}{U} = \frac{R_V+r}{ER_V} + \frac{r}{E} \cdot \frac{1}{R}$$

此时，斜率 $k' = \frac{r}{E}$ ；截距 $b' = \frac{R_V+r}{ER_V}$ 。

因此，截距的倒数 $\frac{1}{b'}$ 实际上代表了 $\frac{R_V}{R_V+r}E$ ，但我们误以为其代表真实的 E 。所以我们算出的 $E_{\text{测}} < E$ ，

而又把 $k' \frac{R_V}{R_V+r}E$ 当作真实的 r ，所以 $r_{\text{测}} < r$ 。

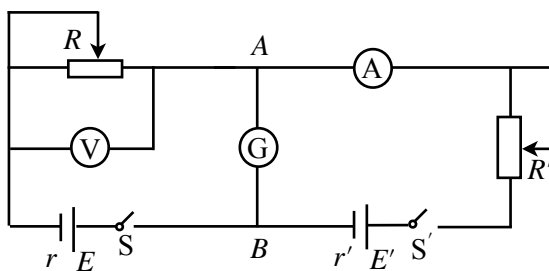
记忆方法 由于电压表的分流作用，此时方法误差与外接法一致， $E_{\text{测}} < E$ ， $r_{\text{测}} < r$ 。

Case3 补偿法

无系统误差的原理 显然，当电压表示数为路端电压，电流表示数为干路电流时， $U-I$ 图像斜率绝对值代表内阻 r ，纵截距代表电动势 E ，且无系统误差。

伏安法的缺陷 伏安法虽然简单，但总会因为电流表分压或电压表分流导致无法得到真实的路端电压或干路电流。因此，可以考虑外加一个电源，来抵消因 R_A 、 R_V 产生的误差，这便是补偿法的底层逻辑。

情景1 电路图示如下



设计思路 为了解决电流表分压的难题，加入新电源，抵消电流表内阻 R_A 的电压降作用。

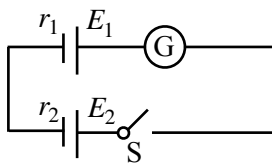
原理 同时满足电压表示数为路端电压，电流表示数为干路电流。

- (1) 对于电流表：调节 R' 使表头 G 示数为0，此时 AB 等电势，相当于断路。因此，整个回路相当于串联，此时电流表示数为干路电流；
- (2) 对于电压表：由于 AB 等电势，因此电压表示数恰好等于待测电源两端电压（路端电压）。

理解 为什么会出现 AB 等电势的现象解决电流表分压的难题，关键原因在于新加入的电源与原来的电源方向相同，抵消了电流表内阻 R_A 的电压降作用。

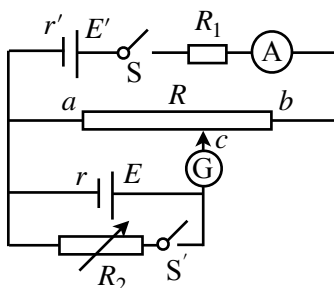
情景2 在给出完整电路图之前请读者先思考下面这个问题

思考 两个电源按图示方式串联，闭合开关后检流计 G 示数为0，二者电动势之间关系如何？



分析 此时二者电动势相互抵消， $E_1 = E_2$ 。

完整电路图示如下：



设计思路 其中 E 、 r 为待测量， ab 为长度为 L 的电阻丝， R 为已知量。

(1) 求出待测 E ：将 S 闭合， S' 断开。我们调节滑片使 G 示数为 0，同上文分析可知，此时 $E = IR_{ac}$ ，而电流 I 为干路电流，可由电流表测得，而 $R_{ac} = \frac{ac}{L}R$ ，由此求出 E 的真实值；

(2) 求出待测 r ：回顾前文等效电源部分，若将电源与电阻并联，新等效电源的电动势便有内阻的参与，因此再求出新等效电源的电动势，反解出内阻即可。将 S' 闭合，此时等效电动势为

$$E_{eq} = \frac{R_2}{R_2 + r} E$$

调节 R_2 阻值，再次使 G 示数为 0 即可测出 E_{eq} ，反解出 r 。

EXAMPLE 1 实验方案对实验测量的精度有直接的影响，某学习小组对“测量电源的电动势和内阻”的实验方案进行了探究。实验室提供的器材有：

干电池一节（电动势约 1.5V，内阻小于 1Ω ）；

电压表 V （量程 3V，内阻约 $3k\Omega$ ）；

电流表 A （量程 0.6A，内阻约 1Ω ）；

滑动变阻器 R （最大阻值为 20Ω ）；

定值电阻 R_1 （阻值 2Ω ）；

定值电阻 R_2 （阻值 5Ω ）；

开关一个，导线若干。

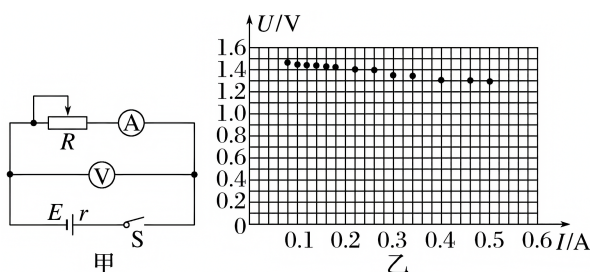
(1) 该小组按照图甲所示的电路进行实验，通过调节滑动变阻器阻值使电流表示数逐渐接近满偏，记录此过程中电压表和电流表的示数，利用实验数据在 $U-I$ 坐标纸上描点，如图乙所示，结果发现电压表示数的变化范围比较小，出现该现象的主要原因是_____。

A. 电压表分流

B. 干电池内阻较小

C. 滑动变阻器最大阻值较小

D. 电流表内阻较小



(2) 针对电压表示数的变化范围比较小的问题，该小组利用实验室提供的器材改进了实验方案，重新测量得到的数据如下表所示。

序号	1	2	3	4	5	6	7
I/A	0.08	0.14	0.20	0.26	0.32	0.36	0.40
U/V	1.35	1.20	1.05	0.88	0.73	0.71	0.52

CHAPTER 4

磁场

一. 认识磁场

1. 磁感应强度 (magnetic induction)

磁场是一种物质形态，通过磁力作用在运动电荷上产生效果。一个运动电荷在它的周围除产生电场外，还产生磁场。此时，在它附近运动的电荷受到的磁力就是该磁场对它的作用。因此磁力作用方式可表示为：



为了描述磁场的强弱，人们引出一个新的物理量，即磁感应强度。

定义 描述磁场强弱与方向的物理量，符号为 B ，国际单位制中单位为特斯拉 (T)。

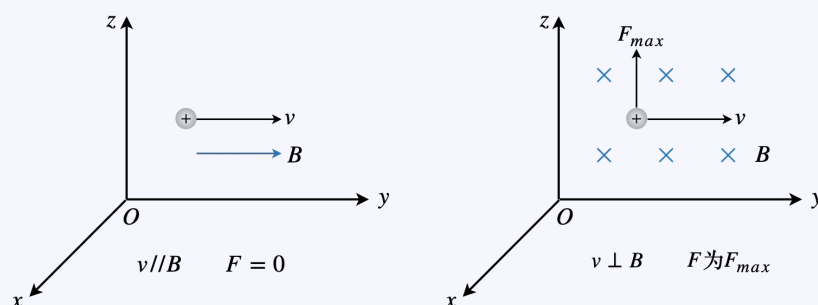
大小 $B = \frac{F_{max}}{q_0 v}$ ，其中 q_0 为运动电荷的电荷量， v 为运动速度， F 为电荷受到的磁场力。

方向 小磁针在该点时 N 极的指向。

矢量性 磁感应强度为矢量，合成遵循平行四边形法则。

深度理解 我们用磁场对以速度 v 运动的正试验电荷 q_0 施以作用力来引入磁感应强度 B ，实验证明：

- (1) 当试验电荷以一恒定的速度 v 运动时，其在场中某点所受的磁场力 F 的值与试验电荷的电荷量 q_0 及运动速度 v 的大小成正比。
- (2) F 的大小与试验电荷 q_0 在该点运动速度 v 的方向有关，如下图所示



实验证明：当试验电荷 q_0 所受的磁场力 F 为零时，此时恰好有 $v // B$ ；当试验电荷 q_0 所受的磁场力 F 达到最大值 F_{max} 时，此时恰好有 $v \perp B$ ，当 v 、 B 夹角大于零、小于 $\frac{\pi}{2}$ 时， F 介于 0 和 F_{max} 之间

- (1) 试验电荷 q_0 所受的磁场力 F 始终垂直 v 和 B 所组成的平面。

- (2) 试验电荷 q_0 在场中某点所受最大磁场力 F_{max} 的大小与 q_0 及 v 的乘积成正比，比值 $\frac{F_{max}}{q_0 v}$ 在场中某点具有确定的值，与运动电荷 q_0 与 v 的乘积无关。可见 $\frac{F_{max}}{q_0 v}$ 反映该点磁场强弱的性质。

因此，人们定义磁场中某点的磁感应强度 B 的大小为

$$B = \frac{F_{max}}{q_0 v}$$

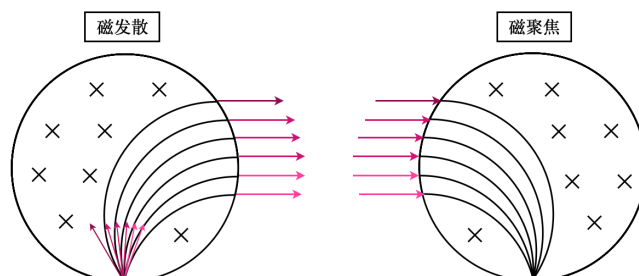
三. 带电粒子在磁场中的复杂运动

1. 磁聚焦与磁发散

模型概述

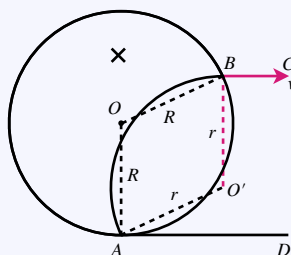
磁聚焦 大量相同速度的带电粒子互相平行射入圆形磁场区域，粒子汇聚于一点射出磁场。

磁发散 从圆形磁场中某点发射相同速度的大量带电粒子，最终都互相平行射出磁场。



限制条件 当粒子在磁场中运动半径 r ($\frac{mv}{qB}$) 与圆形磁场半径 R 相等时，才会发生上述现象。

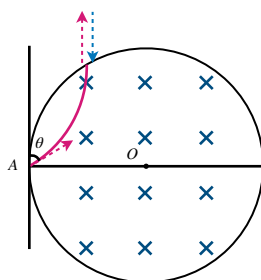
证明 以下图所示为例，一带负电粒子（不计重力）从圆形磁场的 A 点射入， AD 为过 A 点的切线，已知粒子在磁场中运动半径 r 和圆形磁场半径 R 相等。假设粒子从磁场 B 点沿着 BC 方向射出，若要证明磁发散现象，我们仅需证明 $BC \parallel AD$ 。



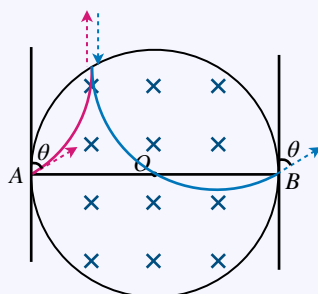
易知四边形 $OA O' B$ 为菱形，所以 $OA \parallel BO'$ 。因为 AD 为圆在 A 点的切线，所以 $AD \perp OA$ ，又因为 BC 为粒子的出射方向，所以 $BO' \perp BC$ ，因此 $BC \parallel AD$ 。因此任意方向射入的粒子均会以相同方向平行射出。

对于磁聚焦现象的证明，仿照上述方式不难证明，请读者自行尝试。

思考 如下图所示，若粒子经磁发散后会以等大反向的速度从出射点射回磁场，那么后续磁场将从何处射出，射出角度是多少？

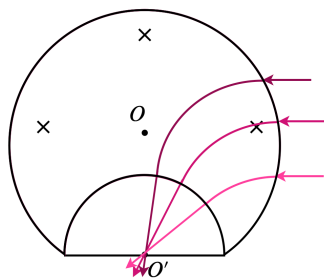


答案 由磁汇聚不难得出，会从 B 点射出，且出射角度与竖直方向成角也为 θ 。轨迹如下图所示



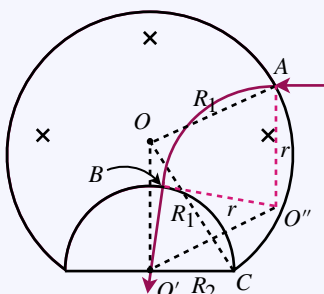
2. 磁聚焦模型变式

Case1 月牙型磁聚焦 如下图所示，由半径为 R_1 的优弧和半径为 R_2 的半圆弧组成的磁场区域，从右侧水平射入的带电粒子均可汇聚到半圆弧的圆心 O'



限制条件：当 $R_1^2 = R_2^2 + r^2$ 时，才会发生上述现象，其中 r 为带电粒子在磁场中的运动半径。

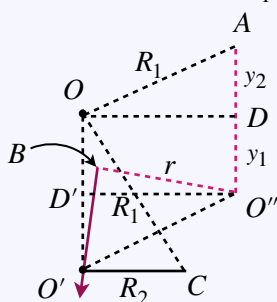
证明 以下图所示为例，设粒子在磁场中运动轨迹圆心为 O'' ，入射点为 A ，出射点为 B



则已知条件为

$$CO = R_1, CO' = R_2, BO' = r, BO'' = R_2, \angle CO'O = 90^\circ$$

若粒子可以恰好通过 O' ，即 BO' 是 B 点处的切线，因此 $\angle O'BO'' = 90^\circ$ ，如下图所示，



过 O 点作 $OD \perp AO''$ ，设 AD 、 DO'' 分别为 y_2 、 y_1 ($y_1 + y_2 = r$)，因此

$$\begin{aligned} O''D'^2 &= OD^2 = R_1^2 - y_2^2, D'O' = \sqrt{R_1^2 - R_2^2} - y_1 \\ \Rightarrow O''O'^2 &= O''D'^2 + D'O'^2 \end{aligned}$$

又因为在 $\triangle BO''O'$ 中，有 $O''O'^2 = O''B^2 + O'B^2 = r^2 + R_2^2$

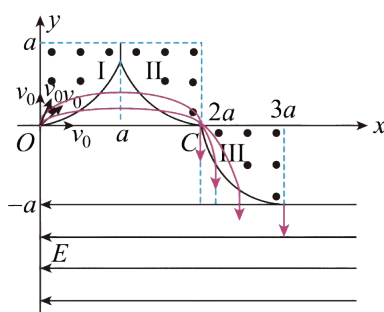
因此化简可得到

$$(R_1^2 - R_2^2 - y_2^2)(R_1^2 - R_2^2 - r^2) = 0$$

显然只能为 $R_1^2 - R_2^2 - r^2 = 0$ ，因此我们可以得到 R_1 、 R_2 和 r 之间的关系为

$$R_1^2 = R_2^2 + r^2$$

Case2 镂空形磁聚焦：如下图所示，半径为 R 的半圆形内部无磁场，外部充满磁场，则从半圆盘直径 AB 上垂直射入的粒子，在磁场中偏转过后都能回到 A 点。



因此从 $x = 2a$ 进入电场的粒子达到 y 轴上离原点最近, 从 $x = 3a$ 进入电场的粒子最远, 则有

$$y_{x=2a} = -a - v_0 t_1, \quad y_{x=3a} = -a - v_0 t_2$$

其中, $2a = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t_1^2$, $3a = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t_2^2$ 。解得: $y_{x=2a} = -a - Ba\sqrt{\frac{4aq}{Em}}$, $y_{x=3a} = -a - Ba\sqrt{\frac{6aq}{Em}}$

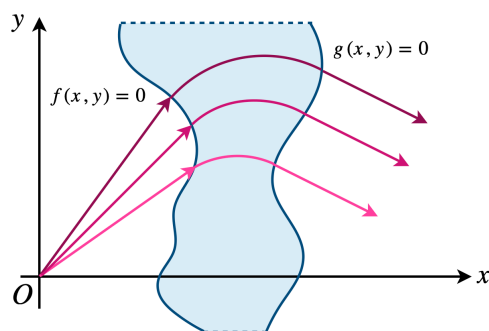
因此这群粒子运动到 y 轴上的区间为 $-a - Ba\sqrt{\frac{6aq}{Em}} \leq y \leq -a - Ba\sqrt{\frac{4aq}{Em}}$ 。

3. 关于磁聚焦的数学讨论

通过上面基础的磁聚焦模型以及相关变式的学习, 我们可以发现要想实现磁聚焦的形成方式并不唯一, 下面讨论磁场区域内外边界具有何种约束条件时可以满足磁聚焦性质。下文中 r 定义为: 粒子在磁场的轨道半径。

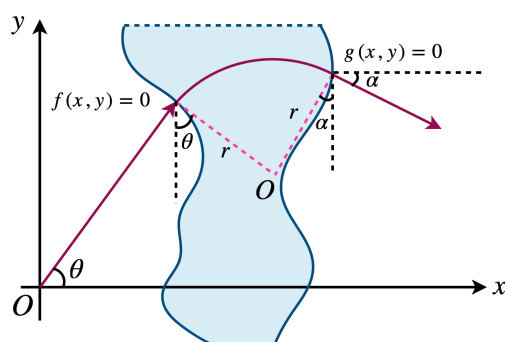
磁聚焦内外边界的约束

如下图所示, 在平面内 f 、 g 为两条连续可导的曲线, 二者将空间分为三个部分, f 、 g 中间充满匀强磁场, 其余部分不含磁场。粒子从原点 O 以相同速度大小射出, 记粒子的射入边 f 为内边界, 射出边 g 为外边界



下面我们来讨论: 当 f 、 g 满足何种关系时, 才能使粒子经磁场偏转后平行射出

以下图为例, 设从 O 点射出的粒子与 x 轴夹角为 θ , 射出磁场时速度方向与 x 轴正方向夹角为 α

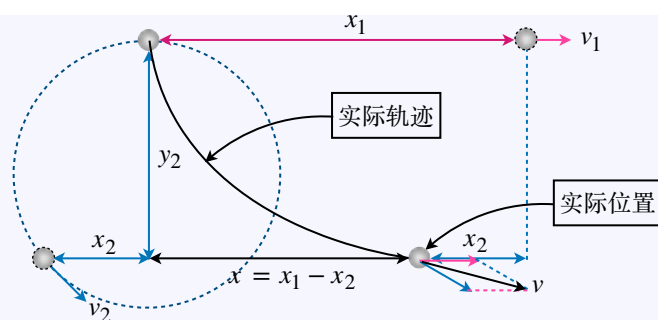


已知两条曲线满足 $f(x_1, y_1) = 0$ 、 $g(x_2, y_2) = 0$, 且由几何关系我们可以得到

$$x_1 + r(\sin \alpha + \sin \theta) = x_2, \quad y_1 + r(\cos \alpha - \cos \theta) = y_2, \quad \theta = \arctan\left(\frac{y_1}{x_1}\right)$$

其中更常见的一般为平行射出, 即 $\alpha = 0$, 此时表达式可简化为

$$x_1 + r \sin \theta = x_2, \quad y_1 + r(1 - \cos \theta) = y_2, \quad \theta = \arctan\left(\frac{y_1}{x_1}\right)$$



v_1 代表的分运动，水平位移 $x_1 = \frac{vT}{3} = \frac{2\pi m E}{3qB^2}$ ；

v_2 代表的分运动，由几何关系得：水平位移 $x_2 = R \sin 60^\circ$ ， $y_2 = R(1 + \cos 60^\circ)$ ，

因此实际水平位移 $x = x_1 - x_2$ ，竖直位移 $y = -y_2$ ，此时粒子速度为 v （ v_1 、 v_2 合成）

由此我们便可确定任意时刻粒子的位置和速度。

综上，我们可以对配速法进行总结：

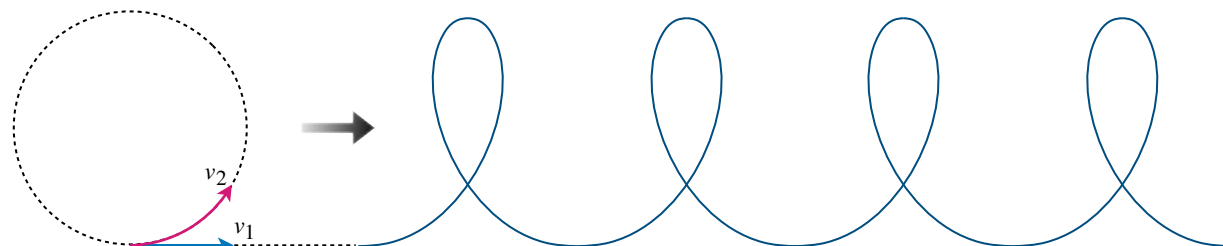
STEP 1 将带电粒子的速度分解为 v_1 、 v_2 ，使其中一个分速度 v_1 引起的洛伦兹力与其他场力平衡

STEP 2 粒子的实际运动就是 v_1 引起的匀速直线运动和 v_2 引起的匀速圆周运动的合运动

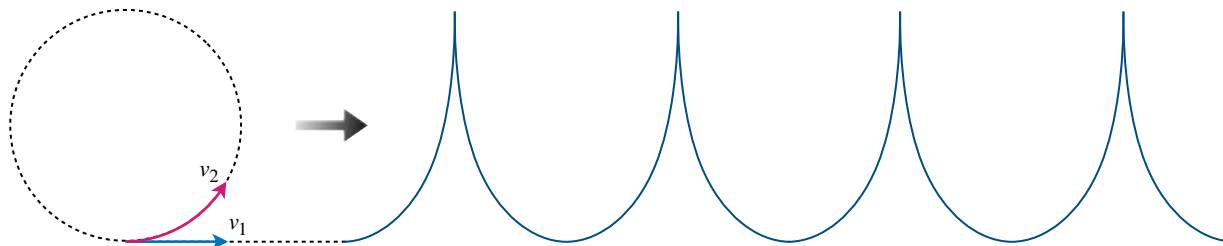
初速度不同时的情况讨论

上述分析情况基于粒子静止在磁场中释放，下面我们给出不同初速度时粒子的运动情况分析，设 v_0 为粒子初速度，设右为正方向（下文仅讨论 $v_0 > 0$ 的情况， $v_0 < 0$ 情况类似）。

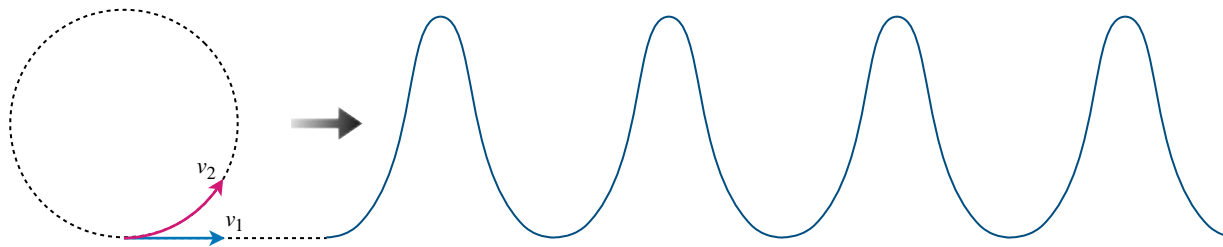
- $v_0 = v_1$ ：此时无需再次分解速度，粒子后续做匀速直线运动
- $v_0 > v_1$ ：此时分解得到的 v_2 向右， v_1 引起向右的匀速直线运动， v_2 引起逆时针的匀速圆周运动
 - $v_2 > v_1$ ：在最高点处，粒子速度向左，轨迹如下图所示



- $v_2 = v_1$ ：在最高点处，粒子合速度为0，轨迹如下图所示



- $v_2 < v_1$ ：在最高点处，粒子合速度向右，轨迹如下图所示



CHAPTER 5

电磁感应

一. 电磁感应基本定律

1. 磁通量

定义 通过曲面 S 上的磁感应线总数，称为通过该曲面的磁通量（magnetic flux），用 Φ 表示。

单位 在国际单位制中，磁通量的单位为韦伯（Wb），且 $1\text{Wb} = 1\text{T} \cdot \text{m}^2$ 。

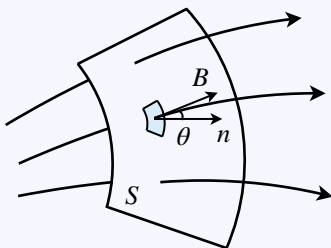
表达式

最简情况 当匀强磁场 B 垂直于平面时，磁通量为 $\Phi = BS$ ，其中 S 为平面面积。

一般情况 当匀强磁场 B 与平面的法线（垂直于平面的线）成角 θ 时， $\Phi = BS \cos \theta = BS_{\perp}$

深度理解（选读） 对于最一般的情况：有限曲面 S 的磁通量为 $\Phi = \int_S B \cdot dS$ ，其中 dS 为面积微元

在不均匀磁场中，若要计算某一曲面的磁通量，如下图所示



在曲面 S 上任取一面积元 dS ，规定 dS 的法线方向 n 即为 dS 的方向， dS 与该处的磁感应强度 B 的夹角为 θ 。回顾磁感线的性质（通过垂直于磁感应强度 B 的单位面积的磁感线根数等于该处 B 的量值），则有

$$B = \frac{d\Phi}{dS_{\perp}}$$

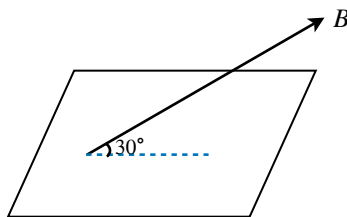
则通过面积元 dS 的磁通量为

$$d\Phi = BdS_{\perp} = BdS \cos \theta = B \cdot dS \quad (\text{向量点乘})$$

通过有限曲面 S 的磁通量为

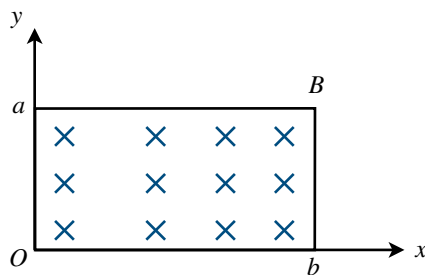
$$\Phi = \int d\Phi = \int_S B \cdot dS$$

练习1 在匀强磁场 B 中，有一面积为 S 与磁感应强度方向夹角 30° 的平面，试求通过该平面的磁通量

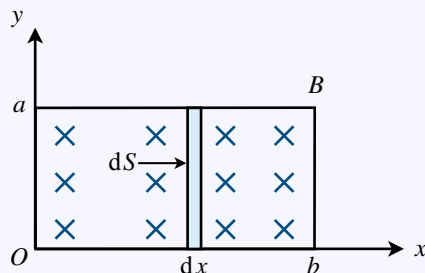


分析 B 与 S 不垂直时应将 B 或 S 分解（无论哪种分解方式得到的结果都是一样的）。因此将 B 分解为垂直、平行平面方向，所以 $\Phi = B \sin \theta \cdot S = \frac{1}{2}BS$ 。

练习2 如下图所示，在非匀强磁场 B 中，磁感应强度随位置的变化规律为 $B = kx$ ，试求在图示坐标系下的矩形平面的磁通量 Φ 。



分析 如下图所示，构建面积微元 dS ，此时可认为在面积微元内的磁感应强度大小不变



因此 $dS = a dx$ ，则通过面积元 dS 的磁通量为

$$d\Phi = B dS = B a dx = k a x dx$$

因此该矩形平面的磁通量 Φ 为

$$\Phi = \int_0^b k a x dx = k a \int_0^b x dx = \frac{1}{2} k a b^2 \quad (\text{可利用定积分的几何意义求解})$$

2. 法拉第电磁感应定律

现象回顾 当穿过闭合导体回路的磁通量发生变化时，回路中会产生感应电流，这种现象称为电磁感应现象，产生的电流称为**感应电流**。

感应电动势 回路中出现电流，说明回路中存在电动势。由磁通量变化产生的电动势称为感应电动势。即使回路没有闭合，不能形成感应电流，感应电动势仍然存在。

定律表述 闭合回路中产生的感应电动势大小，等于穿过该回路的磁通量对时间的变化率。

$$E = \frac{d\Phi}{dt} \quad (\Phi-t \text{ 图像的斜率})$$

注意 E 的大小仅由 Φ 对于时间的导数的大小决定，与 Φ 的大小无关。

N 匝线圈的感应电动势 实际线圈通常由 N 匝导线串联绕制。若穿过每一匝线圈的磁通量均相等时，我们称 $\psi = N\Phi$ 为 N 匝线圈的全磁通，此时

$$E = \frac{d\psi}{dt} = N \frac{d\Phi}{dt}$$

理解 此公式只可确定感应电动势的大小，至于其方向由下文中的楞次定律或右手定则确定。

3. 楞次定律

定律表述 感应电流产生的磁场，总要**阻碍引起感应电流的磁通量的变化**。

深化理解 楞次定律揭示了感应电流方向与原磁场磁通量变化之间的因果关系。

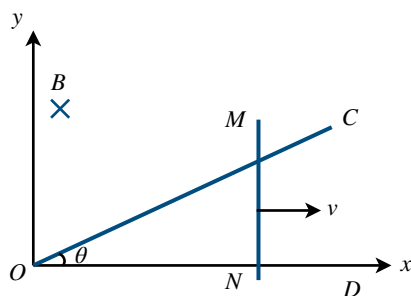
因 穿过闭合回路的磁通量发生变化

果 产生感应电流，感应电流激发新的磁场（感应磁场）

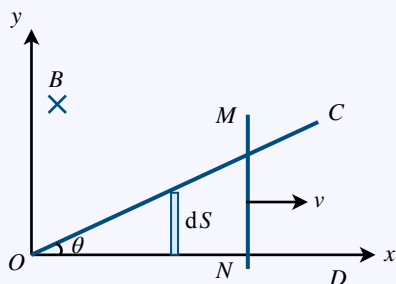
关系 感应磁场的方向与原磁通量的变化趋势相反

对“阻碍”的进一步理解 “阻碍”是楞次定律的灵魂，我们可以从以下三个维度进行理解：

典例分析 在垂直纸面向内的非匀强磁场中，其磁感应强度随时间、位置变化规律为 $B = kx \cos \omega t$ 。有一弯成 θ 角的金属架 COD ， OD 与 x 轴重合。一导体棒 MN 垂直于 OD ，并以恒定速度 v 垂直于 MN 沿 OD 方向向右滑动，设 $t = 0$ 时 $x = 0$ （即 $t = 0$ 时 MN 在 $x = 0$ 处），求框架内感应电动势的随时间的变化规律。



法一（通量求导） 对于这种非匀强磁场，我们不能直接利用 BS 求得磁通量 Φ ，因此利用微元法进行求解，如下图所示，取面积微元 dS ，则有 $d\Phi = B \cdot dS$



又因为 $dS = ydx = x \tan \theta dx$ 。因此，对于任意时刻 t ，穿过回路 OMN 总的磁通量为

$$\Phi = \int d\Phi = \int_0^x kx \cos \omega t \cdot x \tan \theta dx = k \tan \theta \cos \omega t \int_0^x x^2 dx = \frac{1}{3} k x^3 \tan \theta \cos \omega t$$

拓展：对于一般情况： $\int_0^{x_0} x^n dx = \frac{1}{n+1} x_0^{n+1}$ （正常题目中不会涉及此类复杂积分，本例只是为了区分两种方法的区别不得不引入，读者当作特殊条件接受即可）

注意，上式中 $x = vt$ 、本质上也是关于 t 的函数，由法拉第电磁感应定律得

$$\begin{aligned} E &= \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{3} k \tan \theta (\cos \omega t \cdot \frac{dx^3}{dt} + \frac{d \cos \omega t}{dt} \cdot x^3) \\ &= \frac{1}{3} k v^3 t^2 \tan \theta (3 \cos \omega t - \omega t \sin \omega t) \end{aligned}$$

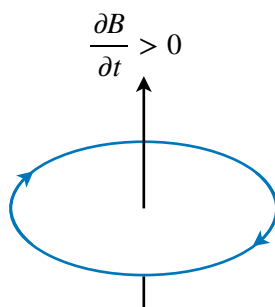
法二（拆分组合） 设动生电动势为 E_1 、感生电动势为 E_2 ，对于 t 时刻下

$$\begin{aligned} E_1 &= BLv = kx \cos \omega t \cdot x \tan \theta \cdot v = k v^3 t^2 \tan \theta \cos \omega t \\ E_2 &= \iint \frac{\partial B}{\partial t} dS = \int_0^x (-kx \omega \sin \omega t) x \tan \theta dx = -\frac{1}{3} k x^3 \tan \theta \omega \sin \omega t = -\frac{1}{3} v^3 t^2 \tan \theta \omega t \sin \omega t \end{aligned}$$

因此合电动势 $E = E_1 + E_2 = \frac{1}{3} k v^3 t^2 \tan \theta (3 \cos \omega t - \omega t \sin \omega t)$ 。

通过本例我们也再次印证了两种方法是等价的，在解题中最好依据 **选取原则** 选择恰当的方法。

EXAMPLE 1 如图所示，一“U”型金属导轨固定在竖直平面内，一电阻不计，质量为 m 的金属棒 ab 垂直于导轨，并静置于绝缘固定支架上。边长为 L 的正方形 $cdef$ 区域内，存在垂直于纸面向外的匀强磁场。支架上方的导轨间，存在竖直向下的匀强磁场。两磁场的磁感应强度大小 B 随时间的变化关系均为 $B = kt$ (SI)， k 为常数 ($k > 0$)。支架上方的导轨足够长，两边导轨单位长度的电阻均为 r ，下方导轨的总电阻为 R 。 $t = 0$ 时，对 ab 施加竖直向上的拉力，恰使其向上做加速度大小为 a 的匀加速直线运动，整个运动过程中 ab 与两边导轨接触良好。已知 ab 与导轨间动摩擦因数为 μ ，重力加速度大小为 g 。不计空气阻力，两磁场互不影响



理解 无需记忆，可用楞次定律进行判断。

利用感生电场计算感生电动势（拓展） 计算感生电动势的基本方法有两种

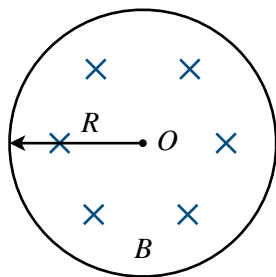
对于闭合回路 直接利用法拉第电磁感应定律的变式进行求解；

对于非闭合回路

METHOD 1 若磁场在空间分布具有对称性，可利用 $\mathcal{E} = \oint_L E \cdot dl = \iint \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS$ ，求出空间中 $E_{\text{感}}$ 的分布（在高中阶段，题目中会给出），再根据最原始的定义 $\mathcal{E} = \oint_L E \cdot dl$ 求解感生电动势。

METHOD 2 构造辅助回路间接求出所求感应电动势。

典例分析 如图所示，有一局限在半径为 R 的圆柱状空间的均匀磁场，方向垂直纸面向里，磁场的变化率为 $\frac{dB}{dt}$ 常数，求距圆心 O 为 r 处的 P 点 ($0 < r < \infty$) 的感生电场场强大小。

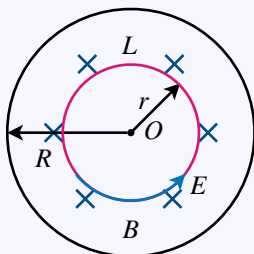


分析 根据磁场对称性可知，空间的感生电场也是对称的，即 $E_{\text{感}}$ 线应是一系列以 O 为圆心的同心圆。作半径为 r 的圆形回路 L 沿顺时针方向，回路所围面积 S 的法线垂直纸面向里，则分两种情况。

(1) $0 \leq r \leq R$ ， P 点在圆柱内，则有

$$\mathcal{E} = \oint_L E \cdot dl = \iint \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS$$

由对称性可知， $E_{\text{感}}$ 线与我们选取的圆形回路 L 如下图所示



因此上式左侧中无论对于哪个微元 dl ， E 均与其共线，因此二者点乘 $E \cdot dl = Edl$ ，绕圆周积分得

$$\oint_L E \cdot dl = E \oint_L dl = 2\pi r E$$

由于是匀强磁场 (B 不随着位置改变 $\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{dB}{dt}$)，因此 $\iint \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS = \pi r^2 \frac{dB}{dt}$ ，联立解得：

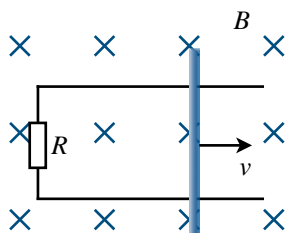
$$E = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$

TUTORCAT

$E = \frac{BdS}{dt} = BR^2\omega \cos \omega t$, 故D正确; 对于C (原理详见下文) $q = \frac{\Delta\Phi}{R}$, 前后磁通量变化为0。因此 $q = 0$; 对于B (原理详见交流电部分), 电动势有效值 $E' = \frac{BR^2\omega}{\sqrt{2}}$, 因此 $Q = \frac{E'^2}{R} \cdot \frac{T}{2} = \frac{\pi\omega B^2 R^4}{2r}$, 故B正确。综上, 选ABD。

2. 核心参数分析与求解策略

典例分析 如下图所示, 质量为 m 的金属杆垂直放在光滑的、宽度为 L 的 U 形水平导轨上。导轨足够长, 导轨与金属杆的电阻不计, 左端接电阻 R , 整个装置位于水平面内, 空间中存在方向竖直向下、磁感应强度为 B 的匀强磁场。。金属杆以初速度 v 开始向右运动, 试分析其后续的运动状态。



分析 此时切割磁感线的金属杆既是电路的电源, 又是安培力的受力体。由牛顿第二定律得

$$F = BIL = B \frac{E}{R} L = \frac{B^2 L^2 v}{R} = ma$$

由楞次定律不难得知, 此时导体棒所受安培力应水平向左, 阻碍其继续运动, 因此

在后续的运动中: $v \downarrow \Rightarrow a \downarrow$, 因此导体棒做加速度减小的减速运动, 最终速度减为0停止运动。

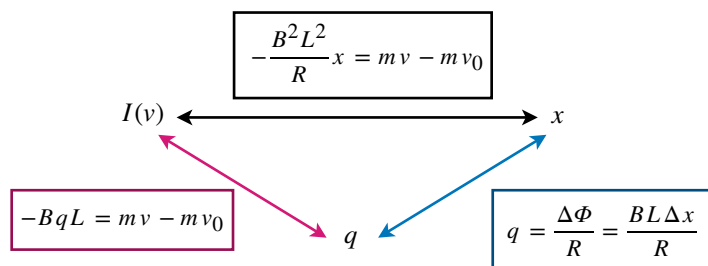
对于此过程, 我们若单纯利用牛顿第二定律进行分析, 只能对其进行简单的定性判断。但在实际题目中, 往往还要求许多运动过程的参数 (运动的位移、某段位移下的末速度、流过的电荷量等等), 因此我们需要引入前文中类似于洛伦兹力冲量的思想, 即将动量定理与积分思想同能量守恒、牛顿定律结合, 对关键参数进行求解。

在此之前, 我们需要先明确题目中常见的参数种类:

q	$I(v)$	x	t	$Q(W)$
流过的电荷量	动量变化量	位移	时间	热量
动力学问题			功能转化问题	

动力学相关参数

其中除 t 外, q 、 $I(v)$ 、 x 三个参数是可互相转化的, 我们只需要借助 q 这个桥梁即可做到知一求二。



核心公式: $q = \frac{\Delta\Phi}{R}$ (R 为电路总电阻)、 $-BqL = \Delta I = mv_1 - mv_0$ 、 $-\frac{B^2 L^2 x}{R} = \Delta I$

分析与证明 本部分讨论内容均为只含动生电动势的情景, 不妨借以典例分析作为讨论背景。

(1) q 与 x : 设某一瞬间导体切割速度为 v , 因此感应电动势 $E = BLv$ 、感应电流 $i = \frac{E}{R} = \frac{BLv}{R}$

根据电流的定义式： $i = \frac{dq}{dt}$ ，联立上式可得

$$dq = \frac{BLv}{R} dt$$

两端积分可得

$$\int_0^q dq = \int_0^{t_0} \frac{BLv}{R} dt$$

由 $\int v dt$ 的几何意义可知，其数值大小即为 v 与坐标轴围成的面积，也就等于该段位移 x 。因此：

$$q = \frac{BL\Delta x}{R} = \frac{B\Delta S}{R} = \frac{\Delta\Phi}{R}$$

小结：在此种情况下， $\Delta\Phi = BL\Delta x$ 。由此我们便构建起 q 与 x 之间的关系，事实上对于任意形状的回路均有 $q = \frac{\Delta\Phi}{R}$ 这一关系，证明如下

$$E = \frac{d\Phi}{dt}, I = \frac{E}{R}, \frac{dq}{dt} = \frac{E}{R} \Rightarrow dq = \frac{d\Phi}{R}, \text{积分得 } q = \frac{\Delta\Phi}{R}$$

(2) q 与 $I(v)$ ：由动量定理可得，在极短时间 dt 内：

$$-BiL \cdot dt = m dv$$

两端积分可得

$$\int_0^{t_0} -BLi dt = \int_{v_0}^v m dv$$

由 $\int i dt$ 的几何意义可知，其数值大小即为 i 与坐标轴围成的面积，也就等于该段的电荷量 q 。因此

$$BqL = mv_0 - mv$$

小结：由此我们便构建起 q 与 $I(v)$ 之间的关系。

(3) $I(v)$ 与 x ：由前两部分的分析我们不难得知，只需要把 $q = \frac{\Delta\Phi}{R}$ 、 $BqL = mv_0 - mv$ 中的 q 联立消去即可构建 $I(v)$ 与 x 之间的关系。联立后我们得到：

$$\frac{B^2 L^2}{R} x = mv_0 - mv$$

但在实际题目中如果不需求 q ，只需分析 $I(v)$ 与 x 的情况下，这样通过联立计算会多出不必要的步骤，因此我们也可通过下面这种方法绕过对 q 的依赖。不难得到感应电流 $i = \frac{E}{R} = \frac{BLv}{R}$

由动量定理可得，在极短时间 dt 内：

$$-BiL \cdot dt = m dv \Leftrightarrow -\frac{B^2 L^2 v}{R} dt = m dv$$

两端积分可得

$$\int_0^{t_0} -\frac{B^2 L^2}{R} v dt = \int_{v_0}^v m dv \Rightarrow \frac{B^2 L^2}{R} x = mv_0 - mv$$

注意 由此还可以看出一个小结论： x 与 v 成线性关系，走过相同的位移，速度变化量也相同，因此

$v-x$ 图像应为斜率恒定的直线。

在题目中，最为常见的形式即为导体框进出磁场过程中动量变化量相同。

特别强调 a. 考试步骤中最好不要直接利用这种微积分的形式进行书写，只需把 $\int$ 换为 $\sum$ 、微元中的 d 换为 Δ 即可。例如

$$\int_0^{t_0} -\frac{B^2 L^2}{R} v dt = \int_{v_0}^v m dv \Rightarrow -\sum \frac{B^2 L^2}{R} v \Delta t = \sum m \Delta v。$$

4. 单双棒切割暂态过程分析

在上一节整个电磁感应知识部分中，“动生电动势的 BLv 公式”仅为法拉第电磁感应定律的一种特殊情况，但在实际题目中出现频率较高，因此对其相关的动力学过程进行分析是十分重要的。

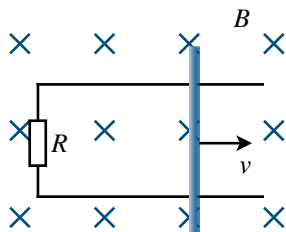
注意 本小节旨在带读者熟悉对此类问题的分析方法与流程，无需对下文中的模型进行背记，掌握前文中对关键参数的转化以及分析流程即可，做到一通百通，将这部分知识的应用变成做题直觉。

对于此类问题，我们主要从整体定性和局部定量两个角度对其进行分析：

整体定性分析	局部定量计算
定性判断运动状态及平衡状态	定量计算中间过程的关键参数
利用牛二分析过程、利用受力平衡确定稳态	利用三个核心公式及电路特性进行计算

无外力作用下的单杆模型

基础模型 回顾前文中分析过的经典模型，单棒在宽度为 L 的轨道上以初速度 v 自由释放进行切割。



整体定性分析：对任意时刻由牛二可得： $F = BIL = \frac{B^2 L^2 v}{R} = ma \Rightarrow v \downarrow a \downarrow$ ，因此

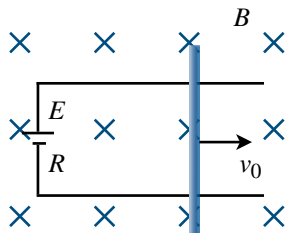
导体棒做加速度减小的减速运动，最终平衡状态：导体棒静止 $\Rightarrow v, a$ 均为0，

局部定量分析：由于已知动量变化量，因此位移 x 与流经的电荷量 q 可求，因此

$$\begin{cases} \frac{B^2 L^2 x}{R} = mv - 0 & \Rightarrow x = \frac{mvR}{B^2 L^2} \\ BqL = mv - 0 & \Rightarrow q = \frac{mv}{BL} \end{cases}$$

Case1 含电源无外力模型

模型概述 光滑导轨宽度为 L ，充满磁感应强度为 B 的匀强磁场，电源电动势为 E ，内阻为 R ，导体棒初速度为 v_0 ，不计其他任何电阻。



整体定性分析：对任意时刻由牛二可得： $F = BIL = B \frac{|BLv - E|}{R} L = ma \Rightarrow a \downarrow$ ，因此

最终平衡状态：电流为0 $\Rightarrow a = 0, v = \frac{E}{BL}$ ，导体棒匀速运动。

当初速度 $v_0 > \frac{E}{BL}$ 时，导体棒做加速度减小的减速运动；

当初速度 $v_0 < \frac{E}{BL}$ 时，导体棒做加速度减小的加速运动；

局部定量分析：由于已知动量变化量，流经的电荷量 q 可求，因此

无外力作用下的双杆模型

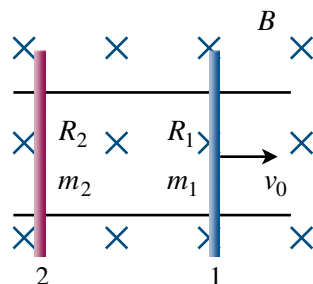
由前文中对单杆模型的分析，我们对此类题目的分析过程有了大致思路：

利用电磁感应定律分析电路 → 受力分析 → 利用平衡条件确定稳定状态

对于双杆模型，电路中为双电源，求感应电流时要注意两电源是相互叠加还是相互抵消，确定好受力后再根据牛二对其进行定性分析。

Case1 等距无外力双杆模型

模型概述 光滑导轨宽度为 L ，充满磁感应强度为 B 的匀强磁场，两导体棒 1、2 电阻分别为 R_1 、 R_2 ，质量分别为 m_1 、 m_2 。现 1 杆以初速度 v_0 向右运动。



整体定性分析：金属杆 1 先以 v_0 向右运动，切割磁感线产生逆时针方向的感应电流，金属杆 2 受到的安培力方向向右，从静止开始向右运动，杆 2 切割磁感线也会产生一个反向的电动势，此时电路中有两个反向串联的电源。设某时刻两杆的速度分别为 v_1 、 v_2 ，则感应电流 $I = \frac{BL(v_1 - v_2)}{R_1 + R_2}$

设右为正方向。根据牛顿第二定律，对杆 1、2 分别得

$$\begin{aligned} -BIL &= -B \frac{BL(v_1 - v_2)}{R_1 + R_2} L = m_1 a_1 \\ BIL &= B \frac{BL(v_1 - v_2)}{R_1 + R_2} L = m_2 a_2 \end{aligned}$$

显然 1 受阻力，2 受动力， $v_1 \downarrow$ $v_2 \uparrow$ 速度逐渐接近， $a \downarrow$ ，最终共速做匀速运动，电流为零。

局部定量分析：若想求 q ， x 等参数需要知道速度的变化量，求解思路与前文类似不过多赘述。唯一需要强调的是，在运动过程中二者始终受到等大反向的力，因此整体动量守恒，我们可借此确定最终的速度，进而确定速度变化量求出 q 、 x 的参数

$$m_1 v_0 = (m_1 + m_2) v \Rightarrow v = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2}$$

思考1 利用 $\frac{B^2 L^2 x}{R} = \Delta I$ 求出的位移是谁的位移？

答案 是二者的相对位移 Δx ，不妨对 2 棒进行分析，回到最基础的推导过程，根据动量定理可得

$$\begin{aligned} B \frac{BL(v_1 - v_2)}{R_1 + R_2} L \cdot dt &= m_2 dv_2 \\ \Rightarrow \frac{B^2 L^2 (x_1 - x_2)}{R_1 + R_2} &= m_2 v - 0 \end{aligned}$$

由此可见求得的 x 为 $\Delta x = x_1 - x_2$ ，即二者的相对位移。

思考2 若已知某段时间 t 及该段时间下的速度变化量，应如何求出单个棒的绝对位移？

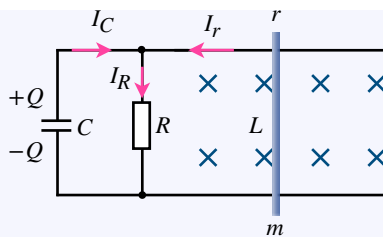
答案 不妨设在 $0 \sim t$ 时间段内，棒 1 速度由 v_1 变为 v_0 ，则 $0 \sim t$ 内两棒的绝对位移 x_1 、 x_2 求解如下：

对 2 由动量定理可得：

$$\frac{B^2 L^2 (x_1 - x_2)}{R_1 + R_2} = m_2 v_2 - 0$$

对整体由动量定理可得：

$$m_1 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \Rightarrow m_1 v_0 \cdot dt = m_1 v_1 \cdot dt + m_2 v_2 \cdot dt$$



同样的，由左手定则可知，导体棒此后要做减速运动。这里又有一个新的疑问：既然 $U_C \downarrow$ 、 $BLv \downarrow$ ，那么有没有可能 BLv 重新小于 U_C ，做加速运动呢？答案是否定的，下面来通过数学严格证明：

证明 设导体棒的速度为 $v(t)$ ，电容器电压为 $u(t)$ 。令 $k = BL$ （常数）。因此，我们需要比较两个变量

$$E(t) = kv(t) \quad VS \quad u(t)$$

想必大家已经猜到，我们仍然依靠牛二和电路方程进行分析：

$$ma = -k \frac{E - u}{r}, \quad I_C = \frac{u}{R} - \frac{E - u}{r}$$

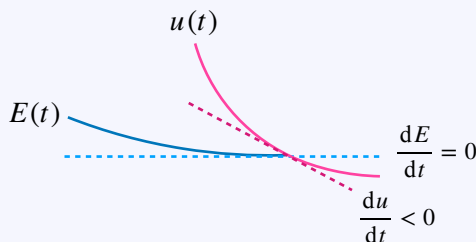
利用 $a = \frac{dv}{dt}$ ， $I_C = -C \frac{du}{dt}$ （由于 $\frac{du}{dt} < 0$ ，为保证 $I_C > 0$ ，添加负号），化简可得

$$\frac{d(kv)}{dt} = -\frac{k^2}{m} \frac{E - u}{r} \quad (E \text{ 的变化率}) \quad , \quad \frac{du}{dt} = \frac{-u}{CR} + \frac{E - u}{Cr} \quad (u \text{ 的变化率})$$

我们只关心 $E > u$ 后的减速状态，假设在未来的某个时刻 t_0 ，曲线 $E(t)$ 首次追上了 $u(t)$ ，即两者再次相等。让我们求解一下在 $E = u$ 这个交点，两条曲线的斜率各是多少。将 $E = u$ 代入上述方程，可得：

$$\frac{dE}{dt} = 0, \quad \frac{du}{dt} = -\frac{u}{RC}$$

显然，在交点处 $E(t)$ 曲线在交点处是水平的，而 $u(t)$ 曲线在交点处是向下倾斜的，由图可知：

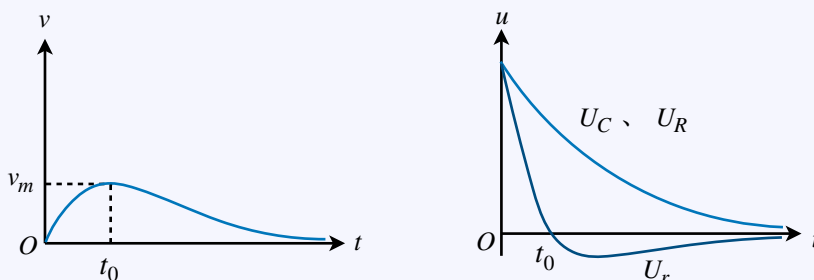


在二者相遇之前，必然存在某个区间内，使得 $u(t) > E(t)$ ，这和我们的前提是矛盾的，因此不会出现 $E(t) \leq u(t)$ 的情况，即在后续过程中 $E(t)$ 恒大于 $u(t)$ ，始终做减速运动。Q.E.D.

回到对该系统的分析，因此导体棒始终做减速运动，这是一个没有外力维持的耗散系统。初始的电场能 $\frac{Q^2}{2C}$ 最终全部转化为电阻 R 和内阻 r 产生的焦耳热。终态：

电容器电荷量放光，导体棒动能耗尽 ($v \rightarrow 0$)

在此过程中，导体棒的 $v-t$ 图像，及 U_C 、 U_R 、 U_r-t 图像如下图所示，其中 t_0 为速度达到最大值 v_m 时刻， $U_r = U_C - BLv$



六. 变压器与远距离输电

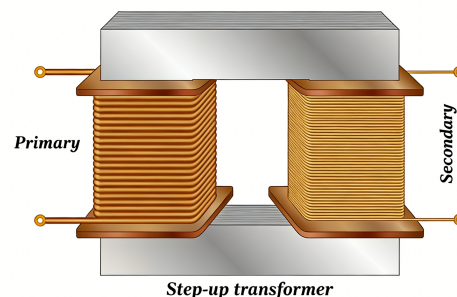
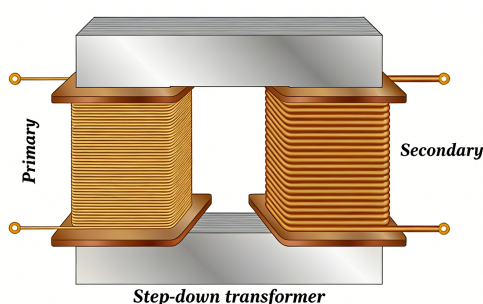
1. 理想变压器的应用及分析

互感现象 两个相互靠近但彼此不相连的线圈，当一个线圈中的电流发生变化时，它产生的变化磁场会穿过另一个线圈，从而在另一个线圈中感应出感应电动势的电磁感应现象。

互感电动势 由互感产生的电动势称为互感电动势。

装置构造与原理

构造 由闭合铁芯和绕在铁芯上的两个线圈组成，与交流电源连接的线圈为原线圈（Primary），与负载连接的线圈为副线圈（Secondary）。



原理 原线圈中交变电流的大小、方向在不断变化。因此铁芯中激发的磁场也不断变化，变化的磁场在副线圈中产生感应电动势（互感）。

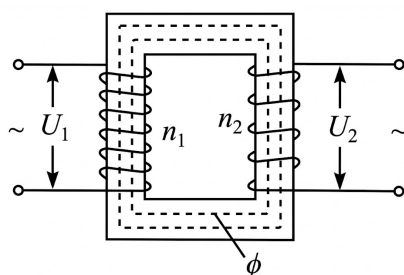
理想变压器 没有能量损耗的变压器叫作理想变压器，它是一个理想化模型，其条件为

- (1) 无磁漏：原、副线圈中的电流产生的磁场完全束缚在闭合铁芯内；
- (2) 无铁损：闭合铁芯中的涡流为零；
- (3) 无铜损：原、副线圈不计电阻，电流通过时不产生焦耳热。
- (4) 原副线圈电感 $L \rightarrow \infty$ （了解即可）

两类变压器 根据原、副线圈匝数之比 $\frac{n_1}{n_2}$ ，我们将变压器分为两类

- a. 升压变压器（Step-up transformer） $\frac{n_1}{n_2} < 1$ ；
- b. 降压变压器（Step-down transformer） $\frac{n_1}{n_2} > 1$ 。

基本公式 在高中阶段所考察的均为理想变压器，其简化模型如下图所示：

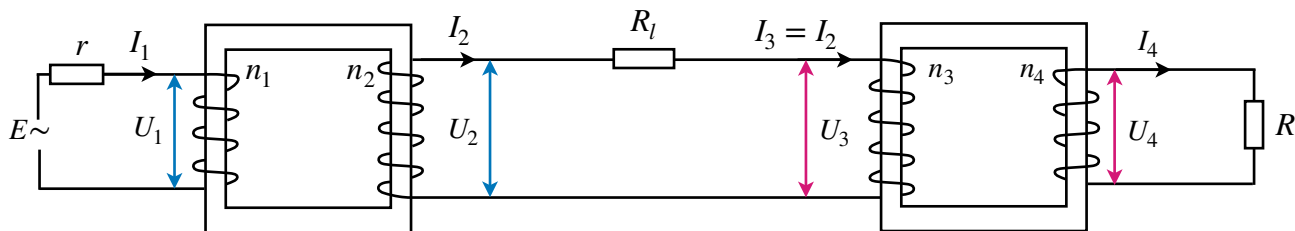


- a. 功率关系： $P_{\text{入}} = P_{\text{出}}$ ；
- b. 电压关系： $\frac{U_1}{U_2} = \frac{n_1}{n_2}$ ；
- c. 电流关系： $\frac{I_1}{I_2} = \frac{n_2}{n_1}$ 。

证明 功率关系：对于理想变压器，我们假设不存在任何能量损耗（无铜损、铁损）。这意味着在任意时刻，输入变压器的功率 $P_{\text{入}}$ 必须等于输出变压器的功率 $P_{\text{出}}$ ；

输电过程中的等效电阻分析 对于远程输电问题，我们一样可以利用等效的思想处理动态分析问题。

典例分析 如下图所示，交流发电机的电动势有效值为 E ，内阻为 r ，理想升、降变压器匝数比分别为 $n_1:n_2$ 、 $n_3:n_4$ ，用户端负载为纯电阻 R ，传输过程中导线电阻等效为 R_l ，试分析



(1) 如果将降压变压器和负载 R 一起看作一个接在 U_3 两端的等效负载 R_3 ，求 R_3 的大小；如果将两个变压器连同输电线路和负载一起看作一个接在 U_1 两端的等效负载 R_1 ，求 R_1 的大小。

(2) 如果将升压变压器和电源一起看作一个给升压变压器副线圈两端供电的等效电源，求该等效电源的电动势 E_2 和内阻 r_2 ；如果将两个变压器连同输电线路和电源一起看作一个给 R 供电的等效电源，求该等效电源的电动势 E_4 和内阻 r_4 。

(3) 求解 I_1 、 I_4 的值。

(4) 利用计算证明，相较于采用电动势为 E ，内阻为 R_l 稳定电源对用户端 R ，远程输电装置中负载 R 的功率 P_1 大于直接传输的功率 P_2 。

分析 (1) 由前文的结论可知， $R_3 = \frac{n_3^2}{n_4^2} R$ ；再对 R_3 和 R_l 的串联和升压变压器一起使用等效结论：

$$R_1 = \frac{n_1^2}{n_2^2} (R_3 + R_l) = \frac{n_1^2}{n_2^2} \frac{n_3^2}{n_4^2} R + \frac{n_1^2}{n_2^2} R_l$$

(2) 由前文的结论可知， $E_2 = \frac{n_2}{n_1} E$ ， $r_2 = \frac{n_2^2}{n_1^2} r$ ；再将 r_2 和 R_l 一起看成 E_2 的内阻，和降压变压器一起使用等效结论：

$$E_4 = \frac{n_4}{n_3} E_2 = \frac{n_4}{n_3} \frac{n_2}{n_1} E \quad , \quad r_4 = \frac{n_4^2}{n_3^2} (r_2 + R_l) = \frac{n_4^2}{n_3^2} \frac{n_2^2}{n_1^2} r + \frac{n_4^2}{n_3^2} R_l$$

(3) 由等效电路的结论，便可快速利用 $E = I_1(R_1 + r)$ 、 $E_4 = I_4(R + r_4)$ 解出 I_1 、 I_4 ，大大简化计算。

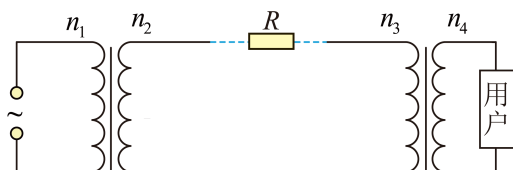
(4) 若采用直流输电， $P_2 = \left(\frac{E}{R + r + R_l}\right)^2 R$ ，若采用交流远距离输电，则有

$$P_1 = I_4^2 R = \frac{E_4^2}{(R + r_4)^2} R = \left(\frac{E}{\frac{n_1 n_3}{n_2 n_4} R + \frac{n_2 n_4}{n_1 n_3} r + \frac{n_1 n_4}{n_2 n_3} R_l}\right)^2 R$$

此时， $\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{\frac{n_1 n_3}{n_2 n_4} R + \frac{n_2 n_4}{n_1 n_3} r + \frac{n_1 n_4}{n_2 n_3} R_l}{R + r + R_l}\right)^2$ ，由于 $\frac{n_1}{n_2}$ 与 $\frac{n_4}{n_3}$ 的数值通常十分接近且小于1，因此

$$\frac{P_2}{P_1} < 1 \quad (\text{即交流传输负载功率更大})$$

EXAMPLE 1 如图所示为某风力发电厂向一学校供电的线路图，已知发电厂的输出功率为8kW，输出电压为400V，用户端电压为220V，输电线总电阻 $R = 20\Omega$ ，升压变压器原、副线圈匝数比 $n_1:n_2 = 1:10$ ，变压器均为理想变压器，下列说法正确的是



A. 输电线上损耗的功率为40W

- A. 电容器 C 的上极板时而带正电荷，时而带负电荷
- B. 开关S断开后，电感线圈中存在振荡电流
- C. 电容器两端最终能够获得远远超出 E 的高压
- D. 开关S断开后，电感线圈两端的电压始终等于电容器两端的电压

解析

对于A，由于二极管具有单向导电性，电容器C的上极板只能带一种极性的电荷（负电荷），不会时而带正电荷，时而带负电荷，故A错误；对于开关S断开后，因二极管具有单向导电性，只能通过一个方向的电流，则电感线圈中不存在振荡电流，故B错误；对于C，多次闭合、断开开关S，利用电感的自感现象和二极管的单向导电性，能不断给电容器充电，使得电容器两端最终能够获得远远超出 E 的高压，故C正确；对于D，由于有二极管，即使自感电动势为0时，电容器两端仍保持高压，无法形成电流，因此D错误。综上，选C。

2. 电磁场与电磁波

麦克斯韦电磁场理论 变化的磁场可以产生电场，变化的电场也可产生磁场。

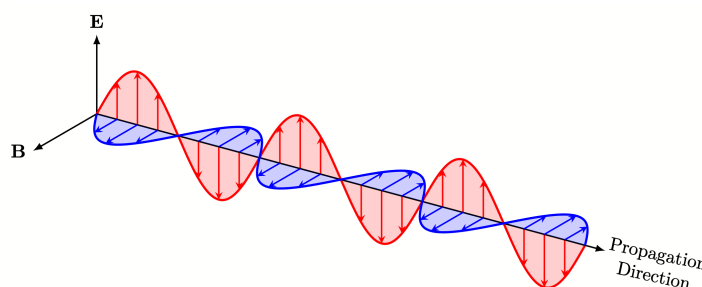
电磁场的本质 变化的电场和磁场互相联系，所形成的不可分割的统一体。

电磁波

产生 如果在空间某区域有周期性变化的电场，就会在周围引起变化的磁场，变化的电场和磁场又会在较远的空间引起新的变化的电场和磁场。这样变化的电场和磁场由近及远地向周围传播，形成了电磁波。

特点

- (1) 在传播方向上，任意一点的 E 和 B 都随时间周期性变化， E 和 B 相互垂直，且与电磁波的传播方向垂直，图示如下



- (2) 电磁波可以在真空中传播，在真空中传播速度 $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = c = 3 \times 10^8 \text{m/s}$;
- (3) 光在本质上是一种电磁波。即光是以波动形式传播的一种电磁振动。
- (4) 电磁波为横波，传递方向与振动方向垂直。

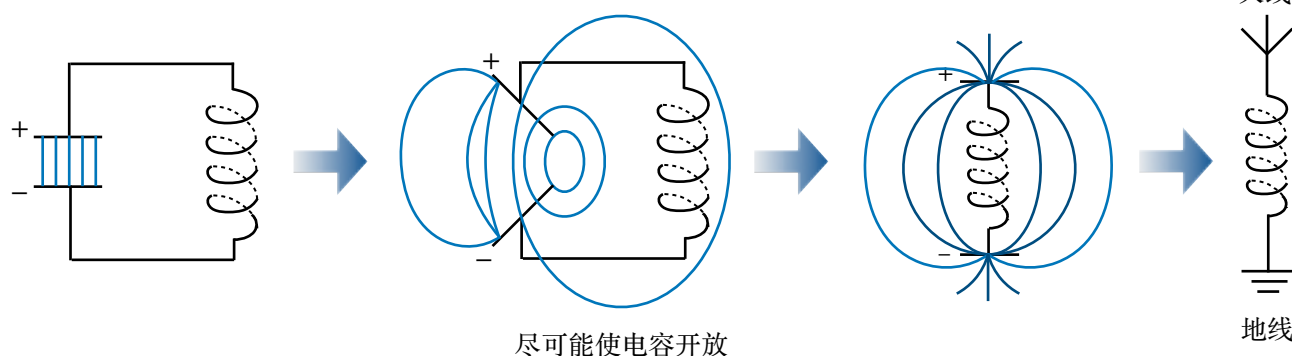
3. 电磁波谱

定义 按电磁波的波长或频率大小的顺序把它们排列起来，就是电磁波谱。

参数关系 电磁波的波速 c 与波长 λ 、频率 f 的关系是 $c = \lambda f$ 。

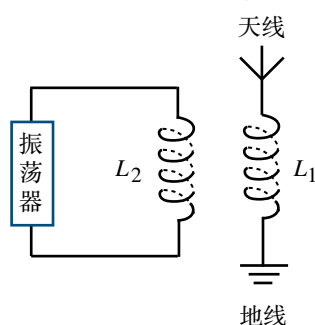
分类与应用 按波长由大到小排列顺序为：无线电波、红外线、可见光、紫外线、X射线、 γ 射线。

- (1) 无线电波：用于广播、卫星通信、电视等的信号传输；
- (2) 红外线：用来加热理疗、红外遥感等；
- (3) 可见光：照亮自然界，也可用于通信；
- (4) 紫外线：用于消毒、防伪等；
- (5) X射线：用于检查、医用透视。



理解 振荡电路的电场和磁场必须分散到尽可能大的空间，因此采用开放电路。实际应用中：线圈的一端用导线与大地相连，这条导线叫作地线；线圈的另一端与高高地架在空中的天线相连。

(3) **要进行感应耦合** 即利用互感现象使开放电路产生振荡电流，图示如下

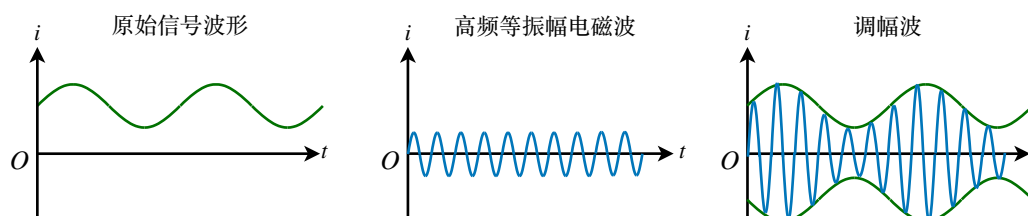


补充 振荡器：能产生频率很高的交变电流的器件；

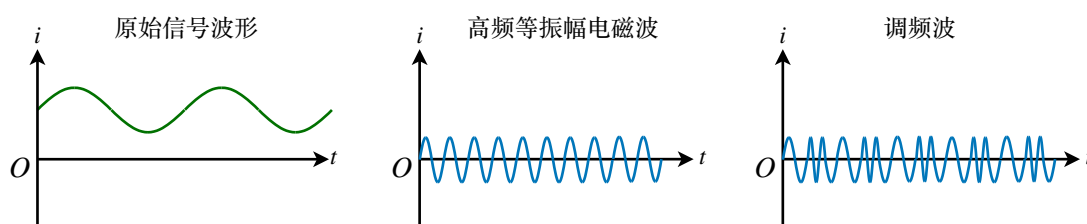
载波的定义：振荡器产生的高频交变电流，是用来携带声音、图象等信息的，叫做载波。

(4) **要对电磁波进行调制** 在电磁波发射中，使载波随各种信号而改变的技术，调制分为调幅和调频。

a. **调幅 (AM)**：使高频电磁波的**振幅**随信号的强弱而变的调制方法；



b. **调频 (FM)**：使高频电磁波的**频率**随信号的强弱而变的调制方法。



无线电波的接收

原理 电磁波在传播时如果遇到导体，会使导体中产生感应电流，空中的导体可以用来接收电磁波，这个导体就是**接收天线**。

电谐振 当接收电路的固有频率与收到的电磁波的频率相同时，接收电路中产生的振荡电流最强，这种现象叫作电谐振，相当于机械振动中的共振。

a. **调谐**：使接收电路产生电谐振的过程；

b. **解调**：把声音或图像信号从高频电流中还原出来的过程。调幅波的解调也叫检波。

方法